MATEMATIČKA INDUKCIJA

Princip matematičke indukcije glasi:
Ako za neko tvrdjenje $T(n)$, $n \in N$ važi:

1) $T(1)$ je tačno
2) $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ je tačno za $\forall_n = 1,2,...$ tada je tvrdjenje $T(n)$ tačno za $\forall_n \in N$

Može se desiti da tvrdjenje Tn nije tačno za svako $n \in N$ već počev od nekog prirodnog broja $n_0 > 1$ pa , tj. da je Tn tačno za $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2,...$

Tada se dokazivanje metodom matematičke indukcije radi na sledeći način:

1) Proverimo tačnost tvrdjenja Tn_0
2) Dokazujemo da za bilo koje $n > n_0$ iz tačnosti tvrdjenja Tn sledi tačnost tvrdjenja $Tn+1$

Postupak

Praktično, mi ćemo indukciju sprovoditi:

i) Proverimo da li je tvrdjenje tačno za n=1
ii) Predpostavimo da je tvrdjenje tačno za n=k
iii) Dokazujemo da je tvrdjenje tačno za n=k+1

Zadaci:

1) Dokazati da je : $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

i) Najpre proverimo dali je tvrdjenje tačno za n=1.(to jest gde vidimo n stavimo 1)

$1 = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = 1$ tačno

ii) Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za n=k (to nam je indukcijska hipoteza)
Gde vidimo n stavimo k

$1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$

iii) **Da dokažemo da je tvrdjenje tačno za n=k+1**
Najpre vidimo šta treba da dokažemo, u početnoj formuli n zamenimo sa k+1 ali **uvek na levoj strani napišemo i predposlednji član.**

$$1+2+\ldots+\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pretposlednji član}}}{k}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

odnosno: $1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Znači , ovo treba da dokažemo!!!

Uvek krenemo od indukcijske hipoteze za koju smo pretpostavili da je uvek tačna

$$1+2+3\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Zastanemo malo i uporedimo leve strane hipoteze i onoga šta treba da dokažemo. Vidimo da u hipotezi ''fali'' (k+1). To je **TRIK**, da na obe strane hipoteze dodamo izraz (k+1).

$$1+2+3\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

Sad nam preostaje da ''sredimo'' desnu stranu i iz nje dobijemo $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Dakle:

$$\frac{k(k+1)}{2}+\frac{k+1}{1}=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$= \text{Izvučemo zajednički } (k+1)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Ovim je dokaz završen.

2) Dokazati da je: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

i) Proverimo da li je tvrdjenje tačno za $n=1$

$$1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}\Rightarrow 1=1 \text{ tačno}$$

ii) Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $n=k$

$$1^2+2^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

iii) Da dokažemo tvrdjenje za $n=k+1$ Uvek prvo vidimo šta treba dokazati!!!

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

tj. $1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Krenimo od indukcijske hipoteze i na obe strane dodamo $(k+1)^2$

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+(k+1)^2$$

Leva strana onog što treba da dokažemo.

Ovo kad ''sredimo'' treba da nam da $\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Dakle:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{(k+1)^2}{1}=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

[Izvučemo ''zajednički'' $(k+1)$] $=\dfrac{(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]}{6}$

$$=\frac{(k+1)\left[2k^2+k+6k+6\right]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)\left[2k^2+7k+6\right]}{6}$$

Izraz $2k^2+7k+6$ ćemo rastaviti na činioce upotrebom znanja iz kvadratne jednačine:
$ak^2+bk+c=0$............................$a(k-k_1)(k-k_2)$

$$2k^2+7k+6=0$$

$$k_{1,2}=\frac{-7\pm 1}{4}$$

$$k_1=-\frac{3}{2}$$

$$k_2=-2$$

Dakle:

$$2k^2+7k+6=2\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+2)=(2k+3)(k+2)$$

Vratimo se u zadatak:

$$=\frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6}=\frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}$$

3) Dokazati da je: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

i) Proverimo da li je tvrdjenje tačno za n=1

$$\frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}=\frac{1}{2\cdot 1+1}\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{3} \text{ tačno!!!}$$

ii) Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za n=k

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

iii) Dokažemo da tvrdjenje važi za n=k+1. Prvo da vidimo šta treba da dokažemo!

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

Dokaz ćemo kao i obično početi od indukcijske hipoteze

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

na obe strane ćemo dodati $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

ovo treba da se ‘’sredi’’ na $\frac{k+1}{2k+3}$

$$\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$2k^2+3k+1=0 \qquad 2k^2+3k+1=a(k-k_1)(k-k_2)$$
$$k_{1,2}=\frac{-3\pm1}{4} \qquad =2\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)$$
$$k_1=-\frac{1}{2} \qquad =(2k+1)(k+1)$$
$$k_2=-1$$

Vratimo se u zadatak:

$$=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{k+1}{2k+3}$$

4) Dokazati da je $5^{n-1}+2^n$ deljiv sa 3

i) Za n=1 $\quad 5^{n-1}+2^n=5^{1-1}+2^1=5^o+2$

$=1+2=3$

Tačno

ii) Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za n=k

to jest da je $5^{k-1}+2^k$ deljivo sa 3

iii) Dokažimo da je za n=k+1 izraz deljiv sa 3:

$$5^{n-1}+2^n=5^{k+1-1}+2^{k+1}$$
$$=5^{k-1+1}+2^k\cdot2^1$$
$$=5^{k-1}5^1\cdot+2^k\cdot2$$
$$=5\cdot5^{k-1}+2\cdot2^k$$

Važi: $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$

Napišimo kao ‘’trik’’: $5\cdot5^{k-1}=3\cdot5^{k-1}+2\cdot5^{k-1}$ to jest $5 = 3 + 2$

$$=3\cdot 5^{k-1}+2\cdot 5^{k-1}+2\cdot 2^{k}$$
$$=3\cdot 5^{k-1}+2(5^{k-1}+2^{k})$$

Ovde je sigurno deljivo sa 3. **Zašto?** Izraz $3\cdot 5^{k-1}$ je deljiv sa 3 zbog činioca trojke. Izraz $2(5^{k-1}+2^{k})$ je deljiv sa 3 zbog naše pretpostavke da je $5^{k-1}+2^{k}$ deljiv sa 3.
Ovim je dokaz završen.

5) Dokazati da je broj $6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}$ deljiv sa 11

Rešenje:

i) za n=1 je $6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}=6^{2}+3^{3}+3^{1}$
$$=36+27+3$$
$$=66=6\cdot 11$$
tačno

ii) pretpostavimo da je broj $6^{2k}+3^{k+2}+3^{k}$ deljiv sa 11

iii) "odradimo" dokaz za n = k+1

$$6^{2(k+1)}+3^{k+1+2}+3^{k+1}=$$
$$6^{2k+2}+3^{k+2+1}+3^{k+1}= \qquad (a^{m+n}=a^{m}\cdot a^{n})$$
$$6^{2k}\cdot 6^{2}+3^{k+2}\cdot 3^{1}+3^{k}\cdot 3^{1}=$$
$$36\cdot 6^{2k}+3\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^{k}=$$

Sad treba neka ideja!!!
Pošto uz 6^{2k} imamo 36 trojke uz 3^{k+2} i 3^{k} ćemo napisati kao 36-33

Dakle:
$$36\cdot\underline{6^{2k}}+36\cdot\underline{3^{k+2}}-33\cdot\underline{\underline{3^{k+2}}}+36\cdot\underline{3^{k}}-33\cdot\underline{\underline{3^{k}}}=$$
$$=36(6^{2k}+3^{k+2}+3^{k})-33(3^{k+2}+3^{k})$$

Izraz $36(6^{2k}+3^{k+2}+3^{k})$ je deljiv sa 11 zbog indukcijske pretpostavke, a izraz $33(3^{k+2}+3^{k})$ zbog broja $33=3\cdot 11$
Ovim je dokaz završen.

6) Dokazati da za ma koji prirodni broj $n>1$ važi nejednakost:
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

Pazi, pošto kaže $n>1$ prva stavka će biti da ispitamo da li je tvrdjenje tačno za n=2

i) n=2 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}$

$\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$ tačno tvrdjenje

ii) pretpostavimo da je tačno za n=k

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$$

iii) da dokažemo da je tvrdjenje tačno za n=k+1
dakle treba da dokažemo:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)}>\frac{13}{24}$$

Moramo upotrebiti novi ''trik''!!!

Obeležimo sa:

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k} \quad (S_k>\frac{13}{24}\text{, po pretpostavci})$$

i $$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$$

Odredimo razliku $S_{k+1}-S_k$!!!

$$S_{k+1}-S_k=\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}\right)-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}\right)$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}-...-\frac{1}{2k}$$

= svi se skrate sem:

$$=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}$$

$$=\frac{1\cdot 2(k+1)+1\cdot(2k+1)-2(k+1)}{(2k+1)\cdot 2\cdot(k+1)}$$

$$=\frac{2k+2+2k+1-4k-2}{2(2k+1)(k+1)}$$

$$=\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}>0$$

Ovo je sigurno pozitivno jer je $k>0 \quad 2k+1>0$ i $k+1>0$

Dakle: $S_{k+1} - S_k > 0$ odnosno:

$$S_{k+1} > S_k > \frac{13}{24}$$

indukcijska hipoteza

pa je $S_{k+1} > \dfrac{13}{24}$

Ovim je dokaz završen!!!

7) **Dokazati da je:**

$2^n > n^2$ **za svako** $n \geq 5$

<u>Rešenje:</u> Dokaz počinjemo za $n = 5$

i)

$n = 5 \Rightarrow 2^5 > 5^2$

$36 > 25$ tačno

ii) Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za n=k
dakle $2^k > k^2$

iii) Dokažimo da je tvrdjenje tačno za n=k+1
znači, treba da dokažemo:
$2^{k+1} > (k+1)^2$

I ovde je potrebna nova ideja!!! Posmatrajmo izraz $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$$

pošto je $n \geq 5 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{5}$ i $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{25}$

onda je $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 = 1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2} \leq 1+\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{25}$

$$1+\frac{2}{5}+\frac{1}{25} = 1+\frac{11}{25} < 2$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < 2$$

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} < 2$$

onda je i $\frac{(k+1)^2}{k^2} < 2$ a hipoteza je $2^k > k^2$. Napišimo ove dve nejednakosti jednu ispred druge.

$$\left.\begin{array}{l} 2^k > k^2 \\ 2 > \frac{(k+1)^2}{k^2} \end{array}\right\}$$ pomnožimo ih! (levu sa levom i desnu sa desnom stranom)

$$2^k \cdot 2 > \frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot k^2$$

$2^{k+1} > (k+1)^2 \rightarrow$ **a ovo smo i trebali da dokažemo**

www.matematiranje.com