Matematička indukcija

Peanove aksiome

Aksiomatsko određivanje prirodnih brojeva našao je Dedekind 1888, a zatim Đuzepe Peano 1891. godine. Opisna, jednostavnija verzija Peanovih aksioma je:

1. 1 je prirodan broj,
2. Sljedbenik ma kog prirodnog broja je prirodan broj.
3. 1 nije sljedbenik nijednog prirodnog broja,
4. Svaki prirodan broj je sljedbenik najviše jednog prirodnog broja.
5. Aksioma indukcije: Ako skup S zadovoljava uvjete:1. $1 \in S$ 2. $k \in S \Rightarrow k' \in S$ sa (svakim članom sadrži i njegovog sljedbenika), 3.onda S sadrži sve prirodne brojeve.

Princip dobrog uređenja

Svaki neprazan skup prirodnih brojeva ima najmanji elemenat.

Princip matematičke indukcije

Neka je S podskup od N koji ima sljedeća dva svojstva:

(1) 1 je u S;

(2) ako je broj k u skupu S, onda je i broj k+1 u skupu S.

Onda je S = N.

Drugi princip matematičke indukcije

Neka je S podskup od N koji ima sljedeća dva svojstva:

(1) 1 je u S;

(2) ako su svi prirodni brojevi manji od k+1 u skupu S, onda je i broj k+1 u skupu S

Onda je S = N.

Polazeći od Peanovih aksioma može se dokazati da su princip dobrog uređenja, princip matematičke indukcije i drugi princip matematičke indukcije ekvivalentna tvrđenja, tj. ako pretpostavimo da važi bilo koji od njih, onda se druga dva mogu dobiti kao posljedice. Peti Peanov aksiom je upravo ovdje formulirani princip matematičke indukcije.

ZADACI:

1. Dokazati jednakost

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2}+\frac{5}{2^2 \cdot 3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

DOKAZ:

1)Dokažio za n=1:

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2}=1-\frac{1}{(1+1)^2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}=1-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

2)Dokažimo sada da ako važi za n=k

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(k+1)^2}$$

važi i za n=k+1

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}+\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}=1-\frac{1}{(k+2)^2} \qquad (2)$$

Pođimo od lijeve strane jednakosti(2)

$$\underbrace{\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}}_{1-\frac{1}{(k+1)^2}}+\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}=$$

$$1-\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}=1-\frac{(k+2)^2-(2k+3)}{(k+1)^2(k+2)^2}=$$

$$1-\frac{k^2+4k+4-2k-3}{(k+1)^2(k+2)^2}=1-\frac{k^2+2k+1}{(k+1)^2(k+2)^2}=1-\frac{1}{(k+2)^2}$$

Iz (1) i (2) slijedi da jednakost važi za $(\forall n)(n\in N)$

2. Dokazati da za svako n ∈N vrijedi jednakost

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)\cdot(2n+3)}$$

DOKAZ:

1)Dokažimo za n=1:

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}=\frac{1\cdot(1+1)}{2(2+1)(2+3)}\Leftrightarrow \frac{1}{15}=\frac{2}{30}\Leftrightarrow \frac{1}{15}=\frac{1}{15}$$

2)Dokažimo sada da ako važi za n=k

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)\cdot(2k+3)}$$

važi i za n=k+1

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}+\frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)\cdot(2k+5)}$$

Pođimo od lijeve strane jednakosti(2)

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}}_{\frac{k(k+1)}{2(2k+1)\cdot(2k+3)}}+\frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=$$

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)\cdot(2k+3)}+\frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=\frac{k(k+1)(2k+5)+2(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=$$

$$=\frac{2k^3+7k^2+7k+2}{2(2k+1)(2k+3)\cdot(2k+5)}=\frac{2k^2(k+1)+5k(k+1)+2(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)\cdot(2k+5)}=$$

$$\frac{(k+1)\left(2k^2+5k+2\right)}{2(2k+1)(2k+3)\cdot(2k+5)}=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)\cdot(2k+5)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)\cdot(2k+5)}$$

Iz (1) i (2) slijedi da jednakost važi za $(\forall n)(n\in N)$

3. Dokazati da za svako n ∈N vrijedi jednakost

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$

DOKAZ:

1)Dokažimo za n=1:

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^1=2^1\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\Leftrightarrow\sqrt{3}-i=\sqrt{3}-i$$

2)Dokažimo sada da ako važi za n=k

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^k=2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\right)$$

važi i za n=k+1

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^{k+1}=2^{k+1}\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{6}-i\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\right) \tag{2}$$

Pođimo od lijeve strane jednakosti(2)

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^{k+1}=\left(\sqrt{3}-i\right)^k\left(\sqrt{3}-i\right)^1=$$

$$2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\right)2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$2^{k+1}\left(\cos\frac{k\pi}{6}\cos\frac{11\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\cos\frac{11\pi}{6}+i\cos\frac{k\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{6}-i^2\sin\frac{k\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$2^{k+1}\left(\cos\frac{k\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{k\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}+i^2\sin\frac{k\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$2^{k+1}\left(\cos\frac{k\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{k\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{k\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$2^{k+1}\left(\cos\frac{k\pi+\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi+\pi}{6}\right)$$

$$2^{k+1}\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{6}-i\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\right)$$

Iz (1) i (2) slijedi da jednakost važi za $(\forall n)(n \in N)$

4. Dokazati da za svako n ∈N vrijedi jednakost

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}\quad .$$

DOKAZ:

1)Dokažimo za n=1:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1(1+1)}{2(2+1)}\Leftrightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

2)Dokažimo sada da ako važi za n=k

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

važi i za n=k+1

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

Dokaz počnimo od lijeve strane:

$$\underbrace{\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}}_{\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)(2k+3)+2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)}=$$

$$\frac{(k+1)[k(2k+3)+2(k+1)]}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)[2k^2+3k+2k+2]}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)[2k^2+4k+k+2]}{2(2k+1)(2k+3)}=$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

Iz (1) i (2) slijedi da jednakost važi za $(\forall n)(n \in N)$

5. Dokazati:

$$196 \mid 2^{3n+2} - 28n - 4 \qquad \forall n \in N \qquad (1)$$

DOKAZ:

1)Dokažimo prvo da za n=1 vrijedi tvrdnja(1)

$$196 \mid 2^{3+2} - 28 - 4 \Rightarrow 196 \mid 32 - 28 - 4 \Rightarrow 196 \mid 0 = 0$$

2)Dokažimo sada tvrdnju:

$$\left(196 \mid 2^{3k+2} - 28k - 4\right) \Rightarrow \left(196 \mid 2^{3(k+1)+2} - 28(k+1) - 4\right)$$

tj: $\left(2^{3k+2} - 28k - 4 = 196p\right) \Rightarrow \left(2^{3(k+1)+2} - 28(k+1) - 4 = 196q\right)$

U dokazivanju pođimo od pretpostavke:

$$2^{3k+2} - 28k - 4 = 196p \quad / 2^3 = 8$$

$$8 \cdot 2^{3k+2} - 224k - 32 = 8 \cdot 196p$$

Izvršimo transformaciju lijeve strane:

$$2^{3k+5} - 28k - 28 - 4 - 196k = 8 \cdot 196p$$

$$2^{3(k+1)+2} - 28(k+1) - 4 = 8 \cdot 196p + 196k$$

$$2^{3(k+1)+2} - 28(k+1) - 4 = 196(8p + k)$$

Sada je jasno da je izraz na desnoj strani oblika 196q($q \in Z$)tj:

$$2^{3(k+1)+2} - 28(k+1) - 4 = 196q$$

Na osnovu 1) i 2) izraz je djeljiv sa 196 za $(\forall n)(n \in N)$

6. Dokazati da za svako $n \in N$ $4 \cdot 6^n + 5n - 4$ djeljivo s 25.

DOKAZ:

1)Dokažimo za n=1:

$$4 \cdot 6^1 + 5 - 4 = 25$$

2)Dokažimo sada da ako važi za n=k

P: $4 \cdot 6^k + 5k - 4 = 25p$

važi i za n=k+1

T: $4 \cdot 6^{k+1} + 5(k+1) - 4 = 25q$

Dokazivanje možemo početi od tvrdnje koristeći pretpostavku(P):

$$4 \cdot 6^{k+1} + 5(k+1) - 4 = 6 \cdot 4 \cdot 6^k + 5k + 5 - 4 =$$

$$6 \cdot 4 \cdot 6^k + 30k - 25k - 24 + 25 = 6\left(4 \cdot 6^k + 5k - 4\right) - 25k + 25 =$$

$$6 \cdot 25p - 25k + 25 = 25(6p - k + 1) = 25q$$

Iz (1) i (2) slijedi da jednakost važi za $(\forall n)(n \in N)$

7. Dokazati da za svako $n \in N$ izraz $3^{2n+3} + 40n - 27$ djeljivo sa 64.

DOKAZ:

1)Dokažimo za n=1:

$$3^{2+3}+40-27=243+40-27=256=4\cdot 64$$

2)Dokažimo sada da ako važi za n=k

P: $3^{2k+3}+40k-27=64p$

važi i za n=k+1

T: $3^{2(k+1)+3}+40(k+1)-27=64q$

Dokazivanje možemo početi od tvrdnje koristeći pretpostavku(P):

$$3^{2(k+1)+3}+40(k+1)-27=9\cdot 3^{2k+3}+40k+13=$$
$$9\cdot 3^{2k+3}+360k-320k-247+256=9\left(3^{2k+3}+40k-27\right)-320k+256=$$
$$9\cdot 64p-320k+256=64(9p-5k+4)=64q$$

Iz (1) i (2) slijedi da jednakost važi za $(\forall n)(n\in N)$

8. Dokazati da za svako n ∈N $10\cdot 3^{2n+1}-24n-30$ djeljivo s 24.

Dokaz:

Tvrđenje je tačno za n =1, jer je broj $10\cdot 3^3-24-30=24\cdot 9$ deljiv sa 24 . Pretpostavimo da tvrđenje važi za n = k , tj. da je broj $10\cdot 3^{2k+1}-24k-30$ deljiv sa 24.Potrebno je dokazati da tvrđenje važi i za n =k +1, tj. da je, broj $10\cdot 3^{2k+3}-24(k+1)-30$ deljiv sa 24 .Kako je: $10\cdot 3^{2k+3}-24(k+1)-30=9\cdot 10\cdot 3^{2k+1}-9\cdot 24k+8\cdot 24k-9\cdot 30+216=9-(10\cdot 3^{2k+1}-24k-30)+24\cdot(8k+9)$ i $10\cdot 3^{2k+1}-24k-30=24p$ po pretpostavci, to je $10\cdot 3^{2k+3}-24(k+1)-30=24\cdot(9p+8k+9)$.

Dakle, po principu matematičke indukcije, dati broj je deljiv sa 24 za svaki prirodan broj.

9.Principom matematičke indukcije dokazati

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$$

DOKAZ:

1)za n=1 je:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&\frac{1(1-1)}{2}\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

2)pretpostavimo da je za n=k

$$A^k=\begin{bmatrix}1&k&\frac{k(k-1)}{2}\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}$$

i dokažmo da je tada i $A^{k+1}=\begin{bmatrix}1 & k+1 & \frac{(k+1)k}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

pođimo od: $A^{k}=\begin{bmatrix}1 & k & \frac{k(k-1)}{2}\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$A^{k}xA=\begin{bmatrix}1 & k & \frac{k(k-1)}{2}\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{k+1}=\begin{bmatrix}1 & k+1 & k+\frac{k(k-1)}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{k+1}=\begin{bmatrix}1 & k+1 & \frac{(k+1)k}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Iz (1) i (2) slijedi da jednakost važi za $(\forall n)(n\in N)$

10.Dokazati nejednakost: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{n}\quad (n\in N)$ vrijedi za svaki $n\geq 2$

Dokaz:

1)Za n=2 slijedi $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}+1>2\Leftrightarrow\sqrt{2}>1\Leftrightarrow 2>1$

2)pretpostavimo da vrijedi za n=k+1

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

I dokažimo da važi i za n=k+2:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{\sqrt{k+2}}>\sqrt{k+2}$$

Pođimo od pretpostavke: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$ i kako je $\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\frac{1}{\sqrt{k+2}}$

Važi: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+2}}=\frac{\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}+1}{\sqrt{k+2}}>\frac{\sqrt{k+1}\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+2}}$

$=\frac{k+1+1}{\sqrt{k+2}}=\frac{k+2}{\sqrt{k+2}}=\sqrt{k+2}$ dakle: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{\sqrt{k+2}}>\sqrt{k+2}$

Iz (1) i (2) slijedi da jednakost važi za $(\forall n)(n\in N)(n\geq 2)$

******moguće su štamparske greške******