'Anura' obrt za poduke
www.anura.hr - matematika@anura.hr
Tina 098-184-3163, 091-733-1635, 095-528-7269

Matematička indukcija

Matematička (potpuna) indukcija je metoda matematičkog dokazivanja.

Neka $\boldsymbol{M \subseteq N}$ (M je podskup skupa N) ima ova dva stvojstva:

(i) $\boldsymbol{1 \in M}$

(ii) $\boldsymbol{(\forall n \in N)\ n \in M \ \Rightarrow n + 1 \in M.}$

Tada je $\boldsymbol{M = N.}$

Matematičku indukciju dokazivanja ispravnosti tvrdnje provodimo kroz 3 koraka:

1. Prvi korak ili ***baza indukcije*** - dokazujemo da zadana tvrdnja vrijedi za $\boldsymbol{n = 1}$.
2. Drugi korak je ***pretpostavka indukcije*** - pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za neki proizvoljni prirodni broj k, pa je $\boldsymbol{n = k.}$
3. Treći korak je ***korak indukcije*** - dokazujemo da tvrdnja vrijedi i za sljedbenika prirodnog broja k , uvrštavamo $\boldsymbol{n = k + 1.}$ Iz svega toga zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Primjer: Dokažimo matematičkom indukcijom da vrijedi tvrdnja:

$$\boldsymbol{1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Matematičku indukciju dokazivanja ispravnosti tvrdnje provodimo kroz 3 koraka:

1) Baza indukcije

- pretpostavljamo da je navedena tvrdnja točna pa dokazujemo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

$$1 = 1$$

- dokazali smo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$

2) Pretpostavka indukcije

- sada pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za bilo koji broj k pa uvrštavamo $n = k$:

$$1 + 2 + \cdots + (k-1) + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

3) Korak indukcije

- sljedeći korak je dokazati da tvrdnja vrijedi i za idući broj, tj. za $k + 1$
- na lijevu stranu dodajemo još jedan član – on je isti kao posljednji član samo što umjesto k ima $k + 1$:

$$1 + 2 + \cdots + (k-1) + k + \boldsymbol{(k+1)} = \cdots$$

- pri tome nam se i suma na desnoj strani mijenja – na mjesto svakog k pišemo $k+1$:

$$\ldots = \frac{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\big((\boldsymbol{k}+\mathbf{1})+1\big)}{2}$$

- kada spojimo lijevu i desnu stranu dobijemo:

$$\mathbf{1}+\mathbf{2}+\cdots+(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})+\boldsymbol{k}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

- *sada možemo primjetiti da je podebljani dio jednak kao i u drugom koraku (pretpostavci indukcije) te jednak* $\frac{k(k+1)}{2}$ *pa stoga vršimo zamjenu i dobijemo:*

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

- *sada samo treba provjeriti da li su lijeva i desna strana jednake – ako jesu tvrdnja je dokazana!*

Zadaci

Dokažite matematičkom indukcijom tvrdnje:

1) $5+8+11+\cdots+(3n+2)=\frac{n(3n+7)}{2}\quad,\forall n\in\mathbb{N}$
2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\quad,\forall n\in\mathbb{N}$
3) $2+7+15+\cdots+\frac{1}{2}n(3n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)^2\quad,\forall n\in\mathbb{N}$
4) $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)\quad,\forall n\in\mathbb{N}$
5) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2\quad,\forall n\in\mathbb{N}$
6) $1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)\quad,\forall n\in\mathbb{N}$
7) $3+4+5+\cdots+(n+2)=\frac{1}{2}n(n+5)\quad,\forall n\in\mathbb{N}$
8) $1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\cdots+(2n-1)(2n+1)=\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}\quad,\forall n\in\mathbb{N}$
9) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\quad,\forall n\in\mathbb{N}$
10) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),\forall n\in\mathbb{N}$
11) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}\quad,\forall n\in\mathbb{N}$
12) $1\cdot2+3\cdot4+5\cdot6+\cdots+(2n-1)2n=\frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)\ ,\forall n\in\mathbb{N}$
13) $6|2n^3+3n^2+7n\quad,\forall n\in\mathbb{N}$
14) $11|6^{2n}+3^{n+2}+3^n\quad,\forall n\in\mathbb{N}$

15) $17|6^{2n}+19^n-2^{n+1}\ ,\forall n\in\mathbb{N}$

16) $19|7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n\ ,\forall n\in\mathbb{N}$

17) $17|3^{4n+4}-4^{3n+3}\ ,\forall n\in\mathbb{N}$

18) $3|4^n+15n-1\ ,\forall n\in\mathbb{N}$

19) $17\big|2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}\ ,\forall n\in\mathbb{N}$

20) Dokazati da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s 9.

21) Pokažite matematičkom indukcijom da je broj $5^n+2^{n+1}, n\in N$ djeljiv s 3.