

1. a)

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 5x-y=4/\bullet 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ 10x-2y=8/\bullet 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y+10x-2y=8+3/\bullet 2 \end{cases} \Rightarrow \\ x+2y=3 \\ 11x=11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ x=\frac{11}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ x=\frac{11}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+2y=3 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=\frac{2}{2} \\ x=1 \end{matrix} \Rightarrow \\ \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

$x, y.(1,1)$

b)

$$\begin{cases} 3x+4y=-1 \\ 2x-y=3/\bullet 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y=-1 \\ 8x-4y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y=-1 \\ 3x+4y+8x-4y=12-1 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 3x+4y=-1 \\ 11x=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y=-1 \\ x=\frac{11}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y=-1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\bullet 1+4y=-1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 4y=-1-3 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{-4}{4} \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

$x, y.(1,-1)$

B)

$$\begin{cases} x-2y=-5/\bullet 2 \\ -2x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4y=-10 \\ -2x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4y=-10 \\ 2x-4y-2x+y=1-10 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 2x-4y=-10 \\ -3y=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4y=-10 \\ y=\frac{-9}{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4y=-10 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4\bullet 3=-10 \\ y=3 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x=-10+12 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{2} \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

$x, y.(1,3)$

2. a)

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x = 2y - 9 \\ x = 2 + y \cdot (-3) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y - 9 \\ -3x = -6 - 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y - 9 \\ 3x + (-3x) = 2y - 9 + (-6) - 3y \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 3x = 2y - 9 \\ -y = 15 \cdot (-1) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y - 9 \\ y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 \cdot (-15) - 9 \\ y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = -30 - 9 \\ y = -15 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 3x = -39 \\ y = -15 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-39}{3} \\ y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -13 \\ y = -15 \end{cases} \\ & x, y. (-13, -15) \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} \begin{cases} 15x + 23y + 10 = 0 \\ 3x + 4y + 2 = 0 \cdot (-5) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 15x + 23y + 10 = 0 \\ -15x - 20y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 15x + 23y + 10 = 0 \\ 15x + 23y + 10 + (-15x) - 20y - 10 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 15x + 23y + 10 = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 15x + 23y + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 15x + 23 \cdot 0 + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x = 0 - 10 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} x = \frac{-10}{15} / : 5 \\ y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x, y. \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$$

3.a)

$$\begin{cases} (x-1) \cdot (y+2) = (x-2) \cdot (y+5) \\ (x+4) \cdot (y-3) - (x+7) \cdot (y-4) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} xy + 2x - y + 2 = xy + 5x - 2y + 10 \\ xy - 3x + 4y - 12 - xy - 4x + 7y - 28 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy + 2x - y + 2 = xy + 5x - 2y + 10 \\ -7x + 11y - 40 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xy + 2x - y + 2 = xy + 5x - 2y + 10 \\ xy + 2x - y + 10 - 7x + 11y - 40 = 0 + xy + 5x - 2y + 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xy + 2x - y + 2 = xy + 5x - 2y + 10 \\ xy + 5x - 10y - 38 = xy + 5x - 2y + 10 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} xy + 2x - y + 2 = xy + 5x - 2y + 10 \\ xy + 5x - 10y - 38 - xy - 5x + 2y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy + 2x - y + 2 = xy + 5x - 2y + 10 \\ -8y = -48 / \bullet (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + 2x - y + 2 = xy + 5x - 2y + 10 \\ y = \frac{48}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xy + 2x - y + 2 = xy + 5x - 2y + 10 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + 2x - y + 2 - xy - 5x + 2y + 10 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y + 2 - 5x + 2y + 10 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y + 12 = 0 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 6 + 12 = 0 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} -3x = -18 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{-18}{-3} \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases}$$

$x, y. (6,6)$

б)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x+3)(x-1) = x^2 + 4y + 5 \\ (3x+2)(x-3) = 3x^2 - 14y + 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 4y + 5 \\ 3x^2 + 9x + 2x - 6 = 3x^2 - 14y + 15 \end{cases} \Rightarrow \\ & \begin{cases} x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 4y + 5 \\ 3x^2 + 9x + 2x - 6 - 3x^2 + 14y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 4y + 5 \\ -7x + 14y - 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ & \begin{cases} x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 4y + 5 \\ x^2 - x + 3x - 3 - x^2 + 4y + 5 - 7x + 14y - 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 4y + 5 \\ -5x + 18y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

Системот нема решение

4. а)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2/\bullet(6) \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0/\bullet(6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 2y + 3x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 6x = 12 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x = \frac{12}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \bullet 2 + 2y = 12 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 12 - 6 \\ x = 2 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$x, y. (2, 3)$

б)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{x}{6} - \frac{y}{9} = -1/\bullet(18) \\ \frac{5x}{9} + \frac{4y}{6} = 15\frac{1}{3}/\bullet(18) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = -18/\bullet 6 \\ 5x + 6y = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x - 12y = -108 \\ 10x + 12y = 90 \end{cases} \Rightarrow \\ & \begin{cases} 18x - 12y = -108 \\ 18x - 12y + 10x + 12y = 90 + 108 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x - 12y = -108 \\ 28x = 198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x - 12y = -108 \\ x = \frac{198}{28} \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} 18x - 12y = -108 \\ x = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18 \bullet 7 - 12y = -108 \\ x = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 126 - 12y = -108 \\ x = 7 \end{cases} \Rightarrow \\ & \begin{cases} -12y = -108 - 126 \\ x = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12y = -234 \\ x = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 19\frac{6}{12} \\ x = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

$x, y. (7, 19)$

B)

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{6x+5y}{8} = 2/\bullet(8) \\ \frac{6x+y}{8} = 1/\bullet(8) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{8\bullet(6x+5y)}{8} = 16 \\ \frac{8\bullet(6x+y)}{8} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+5y = 16/\bullet(-1) \\ 6x+y = 8 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} -6x-5y = -16 \\ -6x-5y+6x+y = 8-16 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -6x-5y = -16 \\ -4y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x-5y = -16 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} -6x-5\bullet 2 = -16 \\ y = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -6x = -16+10 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x = -6 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ &x, y.(1,2) \end{aligned}$$

5. a)

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{2x-1}{5} + \frac{3y+2}{4} = 2/\bullet(20) \\ \frac{3x+1}{5} + \frac{3y+2}{4} = 0/\bullet(20) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{20(2x-1)}{5} + \frac{20(3y+2)}{4} = 40 \\ \frac{20(3x+1)}{5} + \frac{20(3y+2)}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 8x-4+15y+10 = 40 \\ 12x+4-15y+10 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 8x-4+15y+10 = 40 \\ 8x-4+15y+10+12x+4-15y+10 = 0+40 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 8x-4+15y+10 = 40 \\ 20x+20 = 40 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 8x-4+15y+10 = 40 \\ x = \frac{60}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-4+15y+10 = 40 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 8\bullet 3-4+15y+10 = 40 \\ x = 3 \end{cases} &\Rightarrow \\ \begin{cases} 24-4+15y+10 = 40 \\ x = 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 15y = 40+10+4-24 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{30}{15} \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases} \\ &x, y.(3,2) \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-1)^2 + 2(y-1) = (x-2)^2 - 1 \\ (y-1)^2 - y(y-3) + x = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + 2y - 2 = x^2 - 4x + 4 - 1 \\ y^2 - 2y - 1 - y^2 - 3y + x = 3 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + 2y - 2 = x^2 - 4x + 4 - 1 \\ x^2 - 2x + 1 + 2y - 2 - y^2 - 2y - 1 + y^2 - 3y + x = 3 + x^2 - 4x + 4 - 1 \end{cases} &\Rightarrow \\ \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + 2y - 2 = x^2 - 4x + 4 - 1 \\ x^2 - 2x + 1 + 2y - 2 - y^2 - 2y - 1 + y^2 - 3y + x - 3 - x^2 + 4x - 4 + 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \\ \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + 2y - 2 = x^2 - 4x + 4 - 1 \\ 2x + 1 - 2 - 1 - 3y + x + 4x - 4 + 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \end{aligned}$$

дадениот систем равенки е еквивалентен со ситемот равенки $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$, кој има

бесконечно многу решемија. Ако $x=k$, тогаш $y = 2 - k, k \in R$, па решението е $(x, y) = \{(k, 2 - k) / k \in R\}$.

6. а)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x : (x+3) = (y-2) : (y+4) \\ 2y - 5x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot (y+4) = (x+3)(y-2) = \\ 2y - 5x = 9 \end{cases} \Rightarrow \\ & \begin{cases} xy + 4x = xy - 2x + 3y - 6 \\ xy + 4x + 2y - 5x = 9 + xy - 2x + 3y - 6 \end{cases} \Rightarrow \\ & \begin{cases} xy + 4x = xy - 2x + 3y - 6 \\ xy + 4x + 2y - 5x - 9 + xy - 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + 4x = xy - 2x + 3y - 6 \\ 3x - 15 = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} xy + 4x = xy - 2x + 3y - 6 \\ x = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + 4x - xy - 2x + 3y - 6 \\ x = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -6 + 30 \\ x = -5 \end{cases} \Rightarrow \\ & \begin{cases} y = \frac{-24}{3} \\ x = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -8 \\ x = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

$x, y.(-5, -8)$

б)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x-1) : (y+2) = 1 : 2 \\ x : y = 3 : 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot 2 = (y+2) \cdot 1 \\ x \cdot 4 = y \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = y + 2 \\ 4x = 3y \end{cases} \Rightarrow \\ & \begin{cases} 2x - 2 = y + 2 \cdot (-2) \\ 4x = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4 = -2y - 4 \\ -4x + 4 + 4x = 3y - 2y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4 = -2y - 4 \\ y = 8 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4 = -2 \cdot 8 - 4 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4 = -16 - 4 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x = -20 - 4 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \\ & \begin{cases} -4x = -24 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-24}{-4} \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

$x, y.(6, 8)$

7. а)

$$\begin{cases} ax + y = 5a \cdot (-2) \\ x + 2y = 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2ax - 2y = -10a \\ x + 2y = 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2ax = -7a \\ x + 2y = 3a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 2ax = -7a \\ x + 2y = 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7a}{2a-1} \\ \frac{7a}{2a-1} + 2y = 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7a}{2a-1} \\ y = \frac{3a^2 - 5a}{2a-1} \end{cases} \Rightarrow \text{за}$$

$2a - 1 \neq 0; a \neq \frac{1}{2}$, ако $a \neq \frac{1}{2}$ системот е невозможен.

б)

$$\begin{cases} ax + 2ay = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + 2ay = 5 \\ ax + ay = 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - a = 5 - 3a \\ ax + ay = 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5-3a}{a} \\ ax + a \frac{5-3a}{a} = 3a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{5-3a}{a} \\ ax + 5 - 3a = 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5-3a}{a} \\ ax = 3a + 3a - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5-3a}{a} \\ x = \frac{6a-5}{a} \end{cases} \Rightarrow \text{за } a \neq 0, \text{ ако}$$

$a = 0$ тогаш системот е невозможен.

в)

$$\begin{cases} x + y = k \\ kx + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = k \\ (x + y) - (kx + y) = k - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = k \\ x \cdot (1 - k) = k - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 1 + k, k \in R \setminus \{0\} \\ x = -1 \neq 0, k \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Ако } k=1, \text{ тогаш системот е од видот } \begin{cases} x + y = 1 \\ x + s = 1 \end{cases}, \text{ и е}$$

неопределен, т.е. има беспречно многу решенија.

Ако $x = m, m \in R$, тогаш $y = 1 - m$, па решението е парот

$$(x, y) = \{(m, 1 - m) | m \in R\}$$