MATEMATIČKA LOGIKA

***

– TEHNIKE DOKAZIVANJA –

I DEO

Dedukcija i indukcija

Priroda naučnog znanja je u velikoj meri određena njegovom podelom na empirijsko i apriorno znanje, kao i podelom metoda rasuđivanja na induktivne i deduktivne metode.

Termin empirijsko znači zasnovan na iskustvu, dok apriori znači dostižno pre iskustva.

Ukratko, empirijsko znanje se može definisati kao znanje koje zahteva iskustveno opravdanje. Do takvog znanja dolazi se upotrebom isključivo induktivnih metoda rasuđivanja.

Sa druge strane, apriorno znanje možemo definisati kao znanje koje ne mora da se opravda iskustvom.

U dolasku do takvog znanja moraju se, makar u jednom koraku, koristiti deduktivni metodi rasuđivanja, mada se mogu, ali i ne moraju, koristiti i induktivni metodi.

Dedukcija i indukcija

Induktivno zaključivanje je takav oblik zaključivanja kod koga se polazi od empirijskih (iskustvenih) činjenica, a zaključak, koji se izvodi iz tih činjenica, prevazilazi granice onoga što te činjenice kažu.

Pretpostavimo da neko zna da su vrane crne.

Ako je do tog saznanja došao tako što je iz činjenice da su sve vrane koje je video bile crne, izveo zaključak da su sve vrane crne, onda je on koristio induktivno zaključivanje.

Naime, ovde činjenice kažu da su sve vrane koje je video bile crne, a zaključak, prema kome su sve vrane crne, je prevazišao granice onoga što te činjenice kažu.

Induktivno zaključivanje leži upravo u tom prelasku sa tvrđenja koje se odnosi na sve posmatrane slučajeve na tvrđenje koje se odnosi na sve moguće slučajeve date vrste.

Dedukcija i indukcija

Deduktivno zaključivanje je takav oblik zaključivanja kod koga se neki stav, koji zovemo zaključak, izvodi iz nekih drugih stavova koje zovemo premise ili pretpostavke.

Pri takvom zaključivanju se ne bavimo pitanjem da li su premise i zaključak činjenično istiniti.

Jedino čime se tom prilikom bavimo je da utvrđujemo da li se premise i zaključak nalaze u takvom odnosu da zaključak mora nužno da sledi iz premisa.

Drugim rečima, dedukcijom utvrđujemo da li se može a priori znati da ukoliko su premise istinite, da onda i zaključak mora biti istinit.

Pri tome, za izvlačenje zaključaka nije bitno da li su premise istinite ili nisu, zaključci se mogu izvoditi i iz neistinitih premisa.

Dedukcija i indukcija

Razmotrimo, na primer, rasuđivanje:

Svaki vrabac je ptica.

Zec nije ptica.

Dakle, zec nije vrabac.

Deduktivna argumentacija u ovom primeru je ispravna na osnovu svoje logičke forme.

To znači da u svakoj argumentaciji oblika

$Svaki\ A\ je\ B.$

$Nijedan\ C\ nije\ B.$

$Dakle,\ nijedan\ C\ nije\ A.$

možemo a priori znati da ako su premise istinite, onda zaključak mora takođe biti istinit.

Dedukcija i indukcija

U logici se pojam logičke forme shvata kao nešto što je u vezi samo sa rasporedom reči

"svaki", "nijedan", "je",

i izvesnih drugih "logičkih" reči kao što su

"neki", "ne", "i", "ili" i "ako".

Argumentacija koju smo razmotrili ispravna je na osnovu svoje logičke forme – na osnovu rasporeda ovih "logičkih reči" u njoj.

Dedukcija i indukcija

Dedukcija i indukcija su suprotne, ali istovremeno i komplementarne metode.

Suprotnost dedukcije i indukcije ogleda se u činjenici da

- deduktivno zaključivanje vodi nužnim zaključcima, dok
- induktivno zaključivanje vodi samo verovatnim zaključcima.

Sa druge strane, njihova komplementarost se ogleda u njihovom odnosu prema pitanju činjenične istinitosti

- dedukcija služi za isključivanje pogrešnog rasuđivanja ali ne utvrđuje činjeničnu istinitost, dok se
- indukcija bavi upravo činjeničnom istinitošću.

Dedukcija i indukcija

U svetlu ove razlike, metode nauke mogu se podeliti na

- ❏ deduktivne metode, one koje nisu vezane za pitanje činjenične istinitosti, i
- ❏ induktivne metode, koje su vezane za pitanje činjenične istinitosti.

U induktivne metode, koje nazivamo i empirijske metode, ubrajaju se

- ❏ indukcija u užem smislu ili empirijska generalizacija, gde uključujemo i indukciju prostim nabrajanjem,
- ❏ eksperimentalni metod,
- ❏ metod posmatranja,
- ❏ metod merenja,
- ❏ metod analogije, i drugi.

Dedukcija i indukcija

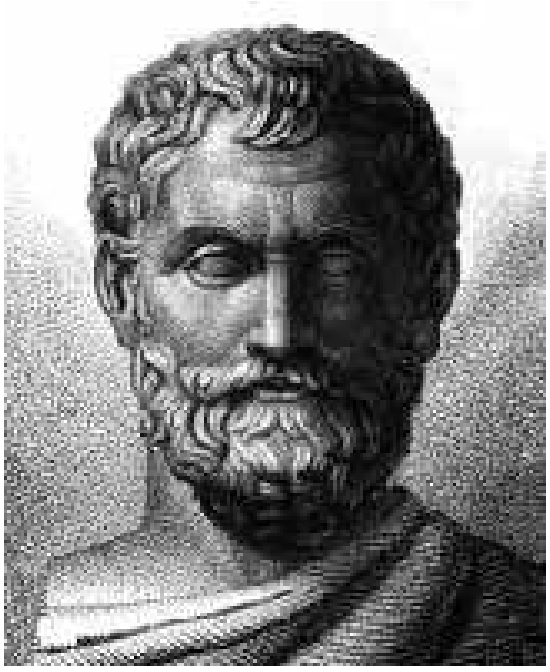
U deduktivne metode, koje nazivamo i teorijske metode, ubrajaju se

- dedukcija u užem smislu, t.j. metod dokazivanja,
- analiza – metoda izdvajanja nečeg što je prisutno kao sastojak,
- sinteza – metoda spajanja stvari koje su bile nepovezane i različite,
- metode obrazovanja naučnih pojmova – apstrahovanje, idealizacija, uopštavanje (generalizacija), konstrukcija, i druge
- metode organizacije naučnih teorija – aksiomatska, konstruktivna i druge metode.

Istorija deduktivnog metoda

Deduktivno zaključivanje je prvi uveo u upotrebu poznati grčki filosof i naučnik Tales, u 6. veku pre nove ere, dokazavši nekoliko teorema o podudarnosti trouglova.

Za dalji razvoj i popularizaciju deduktivnog metoda veoma zaslužan je bio i Pitagora.



Thales of Miletus

624–547 BC

Pythagoras of Samos

569–475 BC

Istorija deduktivnog metoda

Pojava deduktivnog metoda predstavlja jedan od ključnih momenata u razvoju matematike.

Pre Talesa, matematika je bila induktivna nauka, i matematičko istraživanje sastojalo se u prikupljanju raznih empirijskih činjenica o geometrijskim figurama i brojevima.

Sa Talesom, matematika postaje deduktivna nauka, i deduktivni metod postaje "zaštitni znak" matematike.

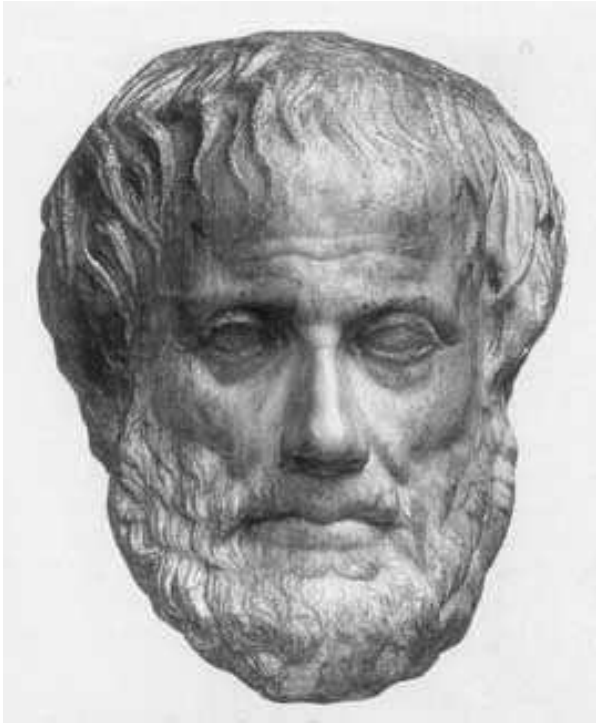
Kao proizvod sve šire i šire upotrebe deduktivnog metoda u matematici, javila su se i brojna naučna pitanja koja su se tičala samog deduktivnog metoda.

Sva ta pitanja dovela su do nastanka još jedne nove nauke – logike.

Istorija deduktivnog metoda

Otac logike je **Aristotel**.

Osnove logike postavljene su u njegovom delu **Organon**.



Aristotle

384–322 BC

U Organonu su po prvi put sistematizovana logička znanja i logika zasnovana kao nauka.

"Organon" na grčkom znači "oruđe", i logika je po Aristotelu trebala da bude oruđe kojim treba da se služe druge nauke.

Istorija deduktivnog metoda

Tvorac prve deduktivne, aksiomatske teorije bio je Euklid.

Euclid of Alexandria

325–265 BC

Ta teorija, koju danas nazivamo Euklidska geometrija, stvorena je u Euklidovom delu Elementi.

Euklidska geometrija predstavlja model po kome se i danas organizuju matematičke teorije.

Istorija deduktivnog metoda

Od antičkog doba, pa sve do srednjeg veka, trajao je period velike stagnacije logike.

Bilo je i onih koji su smatrali da je logika zatvorena nauka i da se u njoj ništa suštinski novo ne može pronaći. Tako je mislio čak i čuveni nemački filosof, Emanuel Kant.

Međutim, bilo je i onih koji su smatrali da je stagnacija logike jedan od glavnih razloga stagnacije celokupne nauke u to doba i da je neophodno ponovo pokrenuti razvoj logike.

Neki, poput engleskog filozofa Frensisa Bekona, pokušali su da stvore novu induktivnu logiku – logiku zasnovanu na induktivnom zaključivanju, umesto deduktivnog, koja bi funkcionisala na sličan način kao deduktivna logika.

Međutim, u tome se nije uspelo.

Istorija deduktivnog metoda

Logiku je pokušao da oživi i čuveni francuski matematičar i filozof Rene Dekart.

Ideja mu je bila da stvori novu logiku, zasnovanu i dalje na deduktivnim principima, ali sa potpuno novim pravilima rasuđivanja.

René Descartes

1596–1650

Svoje ideje Dekart je publikovao u delima

* PRAVILA za usmeravanje duha
* RASPRAVA O METODI pravilnog vođenja svoga uma i istraživanja istine u naukama
* ISTRAŽIVANJE ISTINE prirodnim svetlom uma

Međutim, ni njegove ideje nisu dale praktične rezultate.

Istorija deduktivnog metoda

Najbliži rešenju problema oživljavanja logike bio je nemački matematičar i filosof Gotfrid Lajbnic.

On je smatrao da uzrok stagnacije logike leži u jeziku kojim se ona koristi.

Gottfried Wilhelm von Leibniz

1646–1716

Lajbnic je smatrao da prirodni jezik, kojim se logika do tada koristila, nije pogodan za dalji razvoj logike.

Smatrao je da logika treba da se koristi nekim specijalnim simboličkim jezikom, sličnim jeziku matematike.

Istorija deduktivnog metoda

Osim toga, prema Lajbnicu, logiku bi, po uzoru na aritmetiku, trebalo organizovati u takav sistem, sa takvim pravilima, da ona funkcioniše kao račun.

Ideje su bile izvrsne, ali Lajbnic nije uspeo da ih realizuje.

One nisu čak ni publikovane, i otkrivene su u arhivama Hanoverske biblioteke tek 1905. godine.

A tada je problem već bio rešen, i to upravo na način koji je on predlagao.

Istorija deduktivnog metoda

Logiku je iz stagnacije pokrenuo britanski matematičar Džordž Bul.

On je preveo je logiku na jezik matematike, ili preciznije na jezik algebre, i time stvorio teoriju koju danas zovemo matematička logika.

George Boole

1815–1864

To je urađeno u delu "Istraživanje zakona mišljenja, na kojima su zasnovane matematičke teorije logike i verovatnoće", objavljenom 1854. g.

To delo pokrenulo je veoma intenzivan razvoj simboličkog logičkog aparata, čemu su značajan doprinos kasnije dali i mnogi drugi matematičari-logičari.

Logički paradoksi

Sa ekspanzijom matematičke logike, u nju su ušle i neke neželjene stvari koje nazivamo logički paradoksi.

Među najznačajnije od tih paradoksa spadaju:

Epimenidov paradoks (paradoks lažova):

Krićanin Epimenid kaže: Svi Krićani lažu.

Pitanje: Da li Epimenid govori istinu?

Druga verzija je:

Rečenica koju upravo izgovaram je laž.

Kako god da odgovorimo na ovo pitanje, doći ćemo do protivrečnosti.

Logički paradoksi

Paradoks seoskog berberina:

Definišimo pojam seoskog berberina na sledeći način:

> Seoski berberin je onaj stanovnik sela koji brije sve one koji ne briju sebe same.

Postavlja se pitanje: Da li berberin brije sebe?

Kako god da odgovorimo i na ovo pitanje, dolazimo do protivrečnosti.

Logički paradoksi

Zašto se javljaju paradoksi?

Postoji više razloga zbog čega su se javljali paradoksi:

- zbog nepreciznosti koje postoje u prirodnom jeziku
- zbog nepreciznih definicija, na primer zbog neprecizne definicije pojma iskaza (tvrđenja, stava)
- zbog nedopustivog načina definisanja pojmova
  – David Hilbert (1862–1943, nemački matematičar)

Logički paradoksi

Kako se rešiti paradoksa?

To se može učiniti:

- **korišćenjem simboličkog jezika, umesto prirodnog jezika**
- **preciznijim definicijama i pravilima dokazivanja**
- **formalizacijom jezika, definicija i pravila dokazivanja**

Sve ovo spada među glavne zadatke savremene matematičke logike i deduktivne metodologije.

Matematičke teorije

Organizacija svih matematičkih teorija zasniva se na nekim zajedničkim polaznim principima.

Te principe postavio je još 300. godina pre Hrista antički matematičar Euklid, koji je u svom delu nazvanom Elementi izložio geometriju kao aksiomatsku teoriju.

Sa neznatnim izmenama ti principi i dalje važe i koriste se.

Prilikom izgradnje bilo koje aksiomatske teorije najpre činimo sledeće:

* jedan broj pojmova teorije proglašavamo za osnovne ili primitivne pojmove – pojmove koji se ne definišu;
* jedan broj tvrđenja teorije proglašavamo za aksiome – tvrđenja koja se ne dokazuju;
* navodimo pravila logičkog zaključivanja – pravila koja smemo da koristimo pri dokazivanju raznih tvrđenja u toj teoriji.

Zašto se osnovni pojmovi ne definišu a aksiome ne dokazuju?

Razlog je vrlo jednostavan:

* Nije moguće sve definisati, pa se nešto mora ostaviti nedefinisano, i to su osnovni pojmovi.
* Nije moguće sve dokazati, pa se nešto mora ostaviti nedokazanim, i to su aksiome.

Na primer, svaki pokušaj da se sve dokaže doveo bi do pojave

* poročnog kruga, latinski circulus viciosus, gde bi u dokaz nekog tvrđenja neposredno ili posredno bilo uključeno i ono samo, ili
* beskonačnog regresa – beskonačne hijerarhije novih i novih tvrđenja neophodnih za dokazivanje onih prethodnih.

Matematičke teorije

Osnovni pojmovi se ne definišu, ali o njima obično postoji jasna intuitivna predstava.

Na primer, skup je osnovni pojam u teoriji skupova, tačka i prava su osnovni pojmovi u elementarnoj geometriji, itd.

Ukoliko je teorija aksiomatska, moglo bi se reći i da se osnovni pojmovi ne definišu eksplicitno, ali da su imlicitno definisani sistemom aksioma.

Ostali pojmovi se uvode definicijama.

Definicijama se značenje tih pojmova objašnjava uz pomoć osnovnih pojmova i već ranije definisanih pojmova.

Matematičke teorije

Sa druge strane, teorija se razvija tvrđenjima, odnosno teoremama.

Teoreme se dokazuju na osnovu pravila zaključivanja, i u dokazima se koriste samo aksiome i već ranije dokazane teoreme.

U dokazivanju se ne koristi iskustvo ili ubeđenje ma koje vrste, već isključivo logička pravila.

To znači da je navedeni metod razvijanja teorije deduktivan:

> Novi pojmovi i tvrdnje se izvode ili deduciraju iz već usvojenih, a na osnovu logičkih zakona.

Uvođenje i upotreba navedenih pojmova i postupaka u matematici se proučava u okviru matematičke logike.

Definicije

Novi pojmovi se u matematici uvode rečenicama koje se zovu definicije.

Pojam koji se definiše zove se definiendum, a deo rečenice kojim se on definiše zove se definiens.

Na primer, rečenicom

"Prost broj je prirodan broj koji je deljiv samo sobom i jedinicom"

je definisan pojam prostog broja.

Dakle, u toj definiciji definiendum je "prost broj" a definiens je

"prirodan broj koji je deljiv samo sobom i jedinicom".

Definicije

Šta treba da ispuni jedna definicija da bi bila ispravna?

- **Prvo, definicija treba da bude otklonjiva.**

To znači da umesto svake rečenice u kojoj se javlja pojam koji definišemo može da se formuliše druga rečenica istog smisla, u kojoj se taj pojam ne javlja.

Drugim rečima, u bilo kojoj rečenici u kojoj se definiendum javlja, on se može zameniti definiensom, a da se smisao rečenice ne izmeni.

Dakle, novi pojmovi ne donose ništa novo, ali se njima značajno pojednostavljuje rad i skraćuju formulacije.

▷ **Drugo, definicija ne sme da bude kreativna.**

To znači da definicija ne sme da omogući dokaz tvrđenja koje se bez nje ne bi moglo dokazati.

Takođe, definicija u sebi ne sme da sadrži nikakvo drugo tvrđenje osim tvrđenja da definiendum i definiens imaju ekvivalentna značenja.

Ukoliko definicija zahteva neko tvrđenje, to tvrđenje se mora izvući van definicije i dokazati pre nje.

Na primer, definicija pojma najvećeg zajedničkog delitelja dva broja zahteva da se prethodno dokaže tvrđenje:

> **Za proizvoljna dva prirodna broja m i n, skup $D(m, n)$ svih prirodnih brojeva koji dele m i n ima najveći element.**

Definicije

Kada se ovo tvrđenje dokaže, onda se najveći zajednički delitelj brojeva m i n definiše kao najveći element skupa $D(m, n)$.

Definicija koja bi u sebi sadržala ovo tvrđenje ne bi bila ispravna.

▷ Definicija ne sme da bude nepredikativna.

Nepredikativne su one definicije kod kojih se neki pojam definiše ukazivanjem na njegove veze sa elementima nekog skupa kojem i sam taj pojam može da pripada.

Primer ovakve definicije je definicija seoskog berberina u odgovarajućem paradoksu.

Zabrana nepredikativnih definicija zapravo znači da definiendum ne sme eksplicitno da bude sadržan u definiensu.

Definicije

U matematici često srećemo definicije sledećeg oblika

"x se naziva tako i tako ako i samo ako važi $P(x)$", ili

"x je to i to ako i samo ako važi $P(x)$".

gde je $P(x)$ neko svojstvo (unarni predikat).

Međutim, ako je x promenljiva koja vrednosti uzima u skupu kome pripada i sam objekat koji ovako definišemo, onda se radi o nepredikativnoj definiciju.

Takva je upravo definicija seoskog berberina u istoimenom paradoksu.

Dakle, u ovakvim definicijama moramo strogo voditi računa o tome pomoću kakvog svojstva nešto definišemo.

Definicije

U daljem tekstu navodimo neke karakteristične vrste definicija.

Direktne (eksplicitne) definicije:

Kod ovih definjicija pojam se definiše eksplicitnim navođenjem svojstava koja ga određuju.

Primer 1: Direktne su sledeće definicije:

* Romb je paralelogram sa jednakim stranicama
* Dve prave su mimoilazne ako ne pripadaju istoj ravni

Definicije

Indirektne (implicitne) definicije:

Kod ovih definjicija pojam se ne definiše eksplicitnim navođenjem svojstava koja ga određuju, već kao bilo koji objekat koji ispunjava određene uslove.

Ovakva vrsta definicija najčešće se koristi u aksiomatski zasnovanim teorijama, gde se određeni pojam može definisati kao bilo šta što zadovoljava uslove zadate aksiomama.

Na primer, u aksiomatskoj teoriji brojeva, zasnovanoj pomoću Peanovog sistema aksioma, prirodni broj se definiše kao bilo šta što zadovoljava Peanove aksiome.

Slično, u aksiomatskoj teoriji skupova, skup se definiše kao bilo šta što zadovoljava aksiome te teorije.

Induktivne (rekurzivne) definicije:

Induktivne definicije predstavljaju poseban tip indirektnih definicija.

Induktivna definicija se sastoji iz tri dela:

(i) određuju se neki polazni ili bazni elementi

(ii) određuje se način na koji se, pomoću određenih operacija, iz baznih elemenata mogu definisati drugi elementi

(iii) kaže se da pojmu koji se definiše može pripadati samo ono što se može dobiti primenom pravila (i) i (ii) konačan broj puta

Primer 2: Sledeće definicije su induktivne:

* Definicija formule u iskaznoj logici.
  - (i) Iskazna slova su formule (bazni elementi).
  - (ii) Ako su A i B formule, onda su formule i
    $$\neg A,\ (A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \Rightarrow B),\ (A \Leftrightarrow B).$$
  - (iii) Formule su samo oni izrazi koji se mogu dobiti primenom pravila (i) i (ii) konačan broj puta.
* Definicija terma i formule u predikatskoj logici.
* Definicija Bulovog izraza.
* Definicija formule u FORTRAN-u.

Definicija pomoću zatvorenja:

To je poseban vid induktivne definicije gde se neki skup definiše kao najmanji skup koji sadrži date bazne elemente i zatvoren je za date operacije.

Pri tome, ako f jeste n-arna operacija na skupu A i X je podskup od A, onda kažemo da je X zatvoren za operaciju f ako za proizvoljne $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ važi da je i $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$.

Definicije

Čest oblik definicije je logička ekvivalencija, tj. rečenica oblika

$$A \text{ ako i samo ako } B$$

gde su A i B rečenice ili formule koje sadrže definiendum i definiens, tim redom.

Tu rečenicu kraće simbolički označavamo sa $A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B$.

Oznakom $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ naglašava se da se ekvivalencijom uvodi novi pojam.

Drugim rečima, njome se naglašava da se radi o definiciji, a ne o ekvivalenciji dva iskaza.

Pojmovi se uvode i pomoću jednakosti, opet uz korišćenje posebnih oznaka:

$$p \stackrel{\text{def}}{=} q \qquad \text{ili, sa istim značenjem,} \qquad p := q.$$

Ovde su p i q izrazi, redom definiendum i definiens.

Smisao ovakve definicije je: p je zamena za q.

Primer 3: Primeri definicija prema gornjim oznakama su

* p deli q ako i samo ako postoji r, tako da je $p \cdot r = q$.
* $\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Dokazi

Kada se odaberu polazni stavovi - aksiome neke matematičke teorije, onda se iz njih izvode nova tvrđenja.

U terminološkom smislu, teorema, tvrđenje i stav imaju isto značenje, dok je lema pomoćno tvrđenje tehničkog karaktera.

Tvrđenje koje neposredno sledi iz nekog drugog naziva se posledica.

Dokaz nekog tvrđenja može se definisati kao konačan niz tvrđenja čiji je svaki član ili aksioma, ili tvrđenje koje je ranije dokazano, ili se dobija iz prethodnih članova niza uz pomoć nekog pravila zaključivanja.

Zaključivanje se zasniva na zakonima logičkog mišljenja i raznim logičkim i matematičkim pravilima izvođenja.

Formalizovani oblici tih pravila zaključivanja jesu tautologije i valjane formule.