СМ НА РЕПУБЛИКА МАКЕДОНИЈА
МАТЕМАТИЧКО-ИНФОРМАТИЧКО СПИСАНИЕ ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА

СИГМА

Република Македонија-Republika e Maqedonisë
НАЦ
Примено: 19.12.2011
Org. edinica: 07 | Broj: 4866/2

год. 31 | 3
vol.
2010/2011 | 91

ISSN 1409-6803
UDC 51(497.17)

Математичко списание СИГМА за учениците од средните училишта.
09-6803 UDC51(497.17)
ВЕНИК И ИЗДАВАЧ:
СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА
Првиот број на СИГМА е отпечатен во јануари 1979 година
Излегува во четири броја во текот на една учебна година.
Цената на еден примерок е 90 денари, а претплатата за четирите броја е 300 денари.
Претплатата и порачките можете да ги испратите на адреса:
Сојуз на математичарите на Македонија
Бул. Александар Македонски б.б. Скопје П.Ф. 10
Тел. (02) 3116053 (од 9 до 15 часот)
Жиро сметка 3000 0000 1276 071, ЕДБ 4030 99 11 21 596,
Депонент: Комерцијална банка - Скопје, СМ на Македонија, за СИГМА.

РЕДАКЦИСКИ ОДБОР
и одговорен уредник
Д-р Алекса Малчески, Машински факултет, Скопје
и
Д-р Сава Гроздев, Бугарска академија на науки, Софија
Д-р Risto Малчески, ФОН униврзитет, Скопје
Д-р Весна Манова-Ераковиќ, Природно-математички факултет, Скопје
М-р Слаѓана Брсакоска, Природно-математички факултет, Скопје
М-р Ирена Трајковска, Природно-математички факултет, Скопје
М-р Делчо Лешковски, Скопје
М-р Валентина Миовска, Природно-математички факултет, Скопје
М-р Анета Гацовска, Природно-математички факултет, Скопје
М-р Зоран Мисајлевски, Градежен факултет, Скопје
М-р Игор Димоски, Прилеп
М-р Зоран Трифунов, Велес
Петар Соколовски, Природно-математички факултет, Скопје
Велинов Даниел, Градежен факултет, Скопје
Бојан Прангоски, Машински факултет, Скопје
Зоран Штерјов, Пробиштип
Ѓорѓи Цветков, Кратово

Со мислење на Министерството за култура бр. 07-5074/1 од 09.09.2005 година се одобрува употреба на СИГМА во средните училишта
Печати: АЛФА-94, Скопје. Тираж 1500 примероци

ЕКСТРЕМИ И НИВНА ВИЗУЕЛИЗАЦИЈА

Зоран Трифунов, Линда Стојановска, Витомир Стојановски
Технички факултет, Универзите Св. Климент Охридски – Битола

Во втора година од средното образование во Р. Македонија, учениците се запознаваат со квадратна функција. Една од „големите" работи за квадратната функција е тоа што таа има една екстремна вредност, која е лесно да се најде. Ова ни овозможува како наставници по математика, користејќи логично размислување да ги „максимизираме" или „минимизираме" проблемите во задачите, а потоа заедно со учениците да ги решиме. Не е важно колку е едноставно проблемот да се реши преку алгебарските методи, овде ќе покажеме како со помош на Геогебра и симулирање може проблемот да се визуелизира и вистински да се разбере од учениците.

Пример за екстреми

Како што запишавме на почеток, првата средба на учениците со екстремни вредности, е при изучувањето на квадратни функции. При определување на екстремните вредности во задачите, нема многу докажување, туку првин се користи формула за наоѓање на решение на квадратна равенка, потоа наоѓање на срединшна точка и замена на најдената вредност во функцијата.

- Нека е дадена функцијата: $f(x)=ax^2+bx+c$
- Користејќи ја квадратната формула, корените се: $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- Поради тоа што графикот на квадратната функција е парабола и параболата е симетрична, екстремната вредност се наоѓа во средина помеѓу корените на квадратната равенка: $x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$
- Екстремната вредност е: $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

На крај може со постапката за дополнување до полн квадрат и претходното запишано да кажеме дека, за секоја квадратна функција темето на параболата е во точката $T\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ и со споредбата на квадратниот коефициент *a* (дали е помал или поголем од 0), се определува екстремот на квадратната функцијата.

На овој начин може многу проблеми да се решат алгебарски, како од реалниот живот (колку е профитот на фирмата ако тој е изразен преку квадратна функција), од физиката (како кос истрел) и од самата математика (од Евклидова геометрија).

Пример 1. За кој реален број *x* дропката $\frac{1}{-x^2+4x-7}$ има најмала вредност.

Алгебарско решение, за дропката броителот е константен 1, а именителот за дадена вредности на променливата *x*, добива одредена вредности, значи

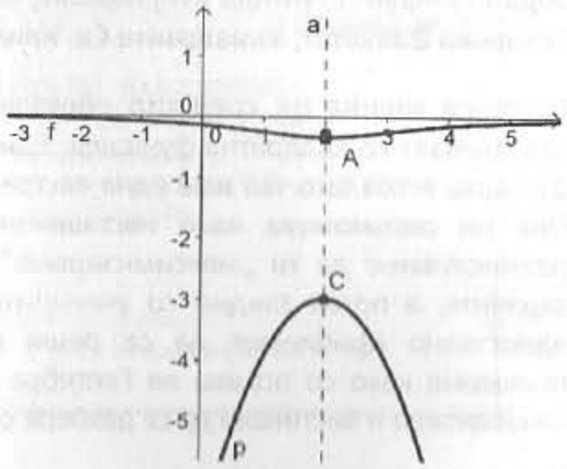
може дропката да ја означиме како функција $f(x)=\frac{1}{-x^2+4x-7}$.

Кога дропката ќе има најмала вредност?

Доколку именителот има најголема вредност.

Затоа за именителот заменуваме функција $p(x)=-x^2+4x-7$, која е квадратна и која за x=2, има максимална вредност $p(2)=-3$, бидејќи a<0. Добивме дека за x=2, дропката има најмала вредност $-\frac{1}{3}$.

Користејќе Геогебра ќе ја илустрираме задачата, односно графички ќе ги претставиме сите овие карактеристики. (слика 1)



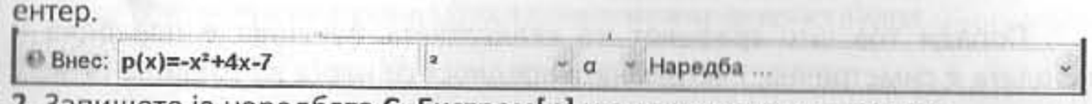
Слика 1

Конструкција во геогебра.

Во оваа статија ќе користиме и нов начин на внесување на наредби во Геогебра со помош на прозорецот за Внес, кој се наоѓа во долниот дел на прозорецот.

Отвораме нов геогебра документ.

1. Во прозорецот за внес запишете ја функција $p(x)=-x^2+4x-7$ и притиснете на ентер.



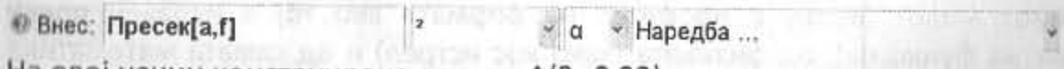
2. Запишете ја наредбата **C=Екстрем[p]** и се притиснете на ентер.

Се добива графикот на квадратната функција и точка C која преставува максимална вредност на функцијата. (Забелешка: Во Геогебра може да се бара само екстремна вредност на полином или полиномна функција)

3. Во прозорецот за внес запишете x=x(C) и притиснете на ентер. Десен клик на правата и од карактеристики изберете вид на линија испрекината, со што ја добивате оската на симетрија на параболата дека е правата а.

4. Во прозорецот за Внес запишете функција $f(x)=\frac{1}{-x^2+4x-7}$ и притиснете на ентер.

5. Во прозорецот на внес запишете наредба **Пресек[a,f]** и притиснете на ентер.



На овој начин конструирана е точка A(2,-0,33).

Од сликата се гледа дека, темето на квадратната функција $p(x)=-x^2+4x-7$ е во точката $C(2,-3)$, а функцијата $f(x)=\frac{1}{-x^2+4x-7}$ има минимална вредност за x=2, а таа е $-\frac{1}{3}$.

Пример 2. Во триаголник со основа BC=a и висина AH= h, да се впише правоаголник со максимална плоштина, ако едната страна на правоаголникот лежи на основата BC.

Алгебарско решение. Ова задача е од екстремни вредности, бидејќи се бара од ученикот да најде максимална плоштина. За да може да се реши проблемот првин кажуваме дека треба да се направи скица. При тоа треба да се напомени, дека конструираме произволен триаголникот кој има два остри агли на основата и во него впишуваме правоаголник на кого две темиња лежат на основата, а потоа веднаш почнуваме да работиме со слични триаголници ABC и ADF. (Слика 2)

Да запишеме $ED=p$, $EG=q$ и за плоштината на правоаголникот добиваме $P=p\cdot q$. Плоштината да ја изразиме преку една променлива. Од сличноста на триаголниците следува дека:

$BC:DF=AH:AH_1$

$a:q=h:(h-p)$

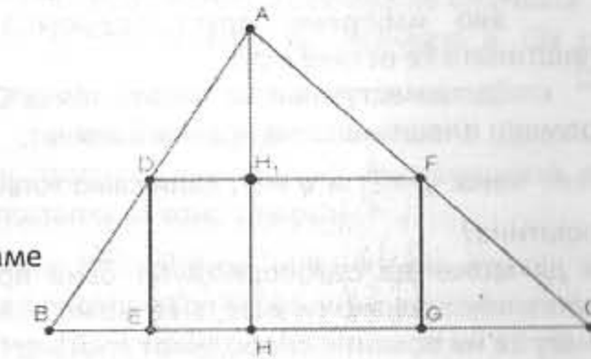
$ah-ap=hq$

$q=a-\frac{a}{h}p$ ... (1)

Заменувајќи, за плоштината добиваме

$P=p\cdot\left(a-\frac{a}{h}p\right)$

т.е. $P(p)=ap-\frac{a}{h}p^2$



Слика 2

Добивме квадратна функција, која за $p=\frac{h}{2}$ и со замена во (1) $q=$

правоаголникот има максимална плоштина (бидејќи $-\frac{a}{h}<0$)

$P=p\cdot q=\frac{h}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{ah}{4}$.

Односно заедно со учениците донесуваме заклучок дека, максималната плоштина на правоаголникот се добива, кога едната страна е половина од основата, а другата страна е половина од висината.

Ако земеме конкретни вредности за страната дека е 6, а висината 4 се добива дека правоаголникот има димензии 3 и 2 и неговата плоштина е 6 квадратни единици.

Овој проблем е добро избран. Тој е еден проблем од Евклидовата геометрија, кој треба да биде повторно дел од светската математичка програма.

Но дали нешто научиле учениците од овој проблем? Тоа може да се провери ако по решавањето на оваа задача побараме од учениците, самостојно да конструираат триаголник и во него да впишат правоаголник. Така ќе може да ги видиме проблемите до кои наидуваат, а ние како наставници кои ги знаеме претходно сме им ги премолчиле. Да ги наведеме неколкуте проблеми кои би ги имале учениците.

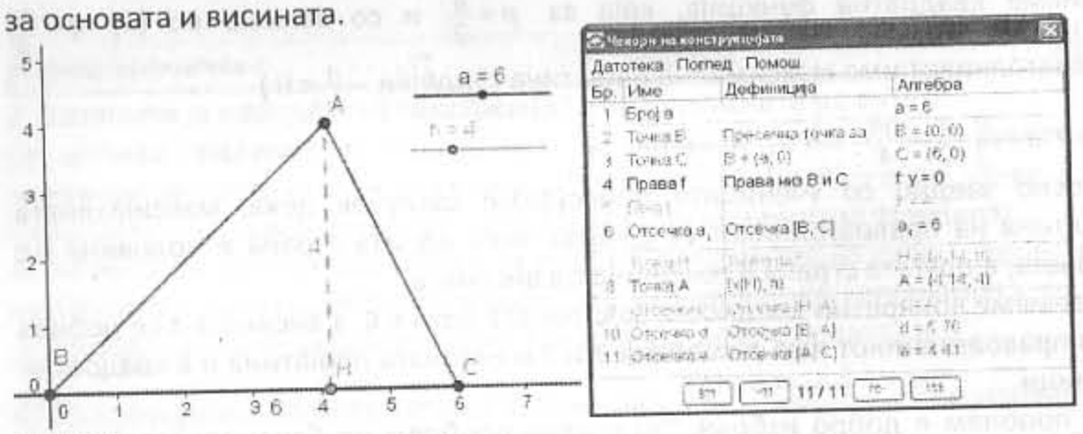
Уште при самата конструкција на триаголникот со зададена основа a (со два остри агли на основата a) и соодветана висина h кон истата страна се гледа

дека триаголникот не е еднозначно определен, но овде премолчуваме дека плоштината не зависи од изборот на триаголникот. Да претпоставиме дека ученикот го конструирал триаголникот и сега треба да направи конструкција на правоаголникот кој е впишан во триаголник. Овде може да настане уште поголем проблем, затоа што од условот запишан во задачата, правоаголникот со две темиња треба да лежи на основата *a*, па ученикот природно е да изберат две темиња кои лежат на основата. При овој избор секогаш не може да се добие правоаголник на кој другите две темиња ќе лежат на останатите страни на триаголникот. Повторно овде ние наставниците, премолчуваме дека за да може да се конструира правоаголник впишан во триаголник мора да избереме едно теме, кое не мора ни да лежи на дадената основа, може да биде на било која страна, а потоа се конструираат останатите три темиња. Сега кога учениците ќе го конструира правоаголникот, се јавуваат уште неколку дилеми и прашања, како на пример:

- ако избереме друга подножна точка на висината *h*, дали плоштината ќе остане иста,
- со поместување на првата точка D од правоаголникот, дали ќе се промени плоштината на правоаголникот,
- ако $p=\frac{h}{2}$ и $q=\frac{a}{2}$, дали само тогаш правоаголникот има најголема плоштина?

За да може да одговориме на овие прашања, а и на претходните, кои наставникот секако ги знае, а ќе може полесно да ги објасни на ученикот, во многу ќе ни помогне слободниот софтвер Геогебра.

Помош за Геогебра: Кога конструираме триаголник, користиме лизгачи *a* и *h* за основата и висината.



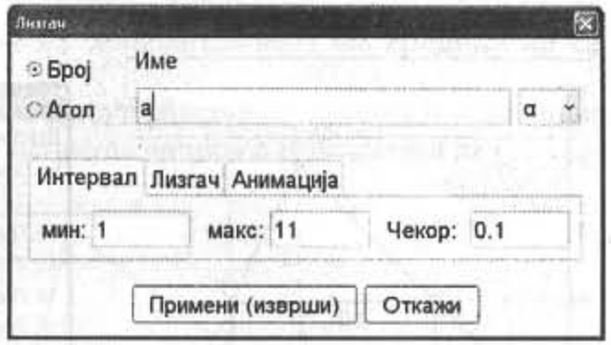
Слика 3

Чекори на конструкција:

Отвораме нов прозорец на геогебра.

Воведуваме нова наредба во геогебра, цртање на лизгач.

1. Лизчач. Изберете ја алатката *лизчач* и кликнете еднаш на геометрикиот прозорец. Се отвора нов прозорец со кој се дефинира лизгачот. Првиот лизгач е а и запишувате мин: 1, а макс: 11 и чекор 0.1. Притиснете на ентер. (Со ова е дефиниран лизгач кој ќе ги прима вредностите на сите реални броеви од 1 до 11 со чекор на промена 0,1)



2. Во прозорецот за внес запишете B=(0,0) и притиснете на ентер. Со ова се конструира точка B во координатниот почеток.

3. Во прозорецот за внес запишете C=B+(a,0) и притиснете на ентер. Добивате точка C.

4. Отсечка. Изберете ја алатката *отсечка* кликнете на точката B па на точката C. Се конструира отсечка BC=a.

5. Нова точка. Изберете ја алатката *нова точка*, кликнете на отсечката a. Со ова конструирате подвижна точка H која припаѓа на отсечката a. (За да проверите дали точката лежи само на отсечката a изберете ја наредбата *поместување*, кликнете на точката H и пробајте да ја поместувате. Доколку точката се движи само по отсечката a, правилно е направена конструкцијата, во спротивно повторете ја претходната постапка за конструкција)

6. Лизчач. Изберете ја алатката *лизчач* и кликнете еднаш на геометрикиот прозорец. Се отвора нов прозорец со кој се дефинира лизгачот. Запишете име на лизгачот h, мин: 1, макс:11 и чекор 0.1. Притиснете на ентер.

7. Во прозорецот за внес запишете A=(x(H),*h*) и притиснете на ентер. На овој начин ја добивте и третата точка од триаголникот која има прва координата иста како првата координата на точката H т.е. x-координата на H, а втората координата е висината на триаголникот која ќе ја прочита од вредноста на лизгачот h.

8. Отсечка. Изберете ја алатката *отсечка*, и кликнете еднаш на точката B па на точката A, а потоа на точката C па на точката A. Со ова е конструиран триаголник ABC, со основа a и висина h.

Подесете ги лизгачите a=6 и h=4.

На овој начин е конструиран триаголник, таков што точката H може да се движи помеѓу точките B и C и да се добијат сите триаголници со дадената основа и висина (Слика 3).

Сега заеднички со учениците може да размислиме како да го конструираме правоаголникот.

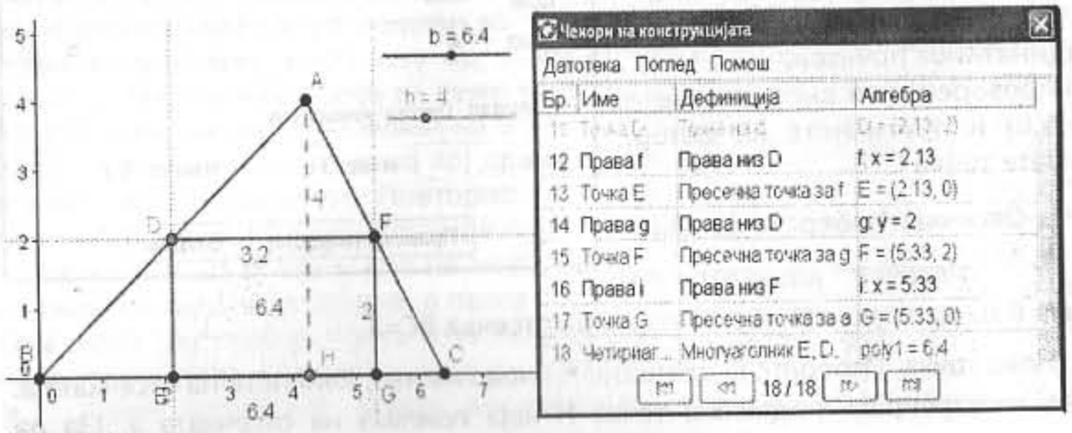
9. Нова точка. Изберете ја алатката *нова точка*, кликнете на отсечката BA. Со ова конструирате подвижна точка D која припаѓа на отсечката BA.

10. Нормала f. Изберете ја алатката *нормала* кликнете на точката D, а потоа на BC, со ова се конструира нормала f на отсечката BC, од точката D.

11. Пресечна точка E. Изберете ја алатката *пресечна точка* кликнете на нормалата f, а потоа на отсечката BC, со тоа се конструира точка E.

12. Паралела p. Изберете ја алатката *Паралела* кликнете на отсечката

ВС, а потоа на точката D, со тоа се конструирате права g паралелна на отсечката ВС, која минува низ точката D.



Слика 4

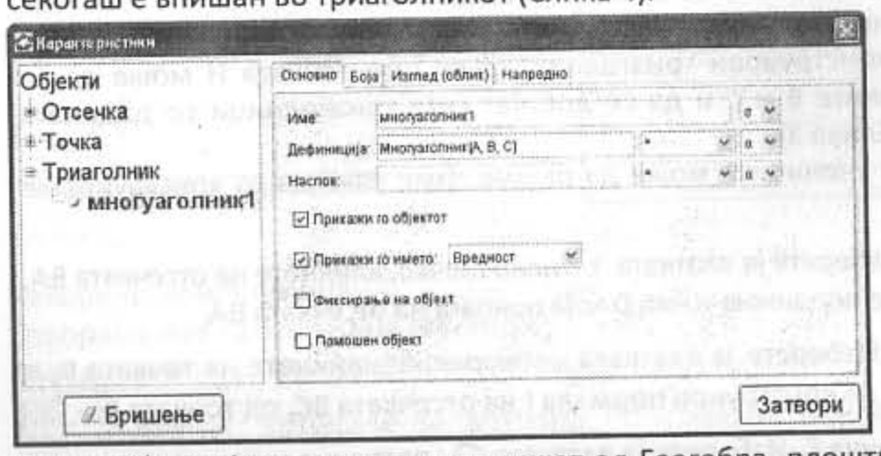
13. Пресечна точка F. Изберете ја алатката *пресечна точка* кликнете на паралелата p, а потоа на отсечката CA, со тоа се конструира точка F.

14. Нормала i. Изберете ја алатката *нормала* кликнете на точката F, а потоа на ВС, со ова се конструира нормала i на отсечката ВС, од точката F.

15. Пресечна точка G. Изберете ја алатката *пресечна точка* кликнете на нормалата i, а потоа на отсечката ВС, со тоа се конструира точка G.

16. Многуаголник. Изберете ја алатката *многуаголник*, кликнете на точките D, E, G, F и повторно на D. На овој начин се конструира многуаголник, во конкретниот пример правоаголник DEGF.

Со оваа конструкција ученикот може да види дека со изборот на точката D, се определуваат и другите точки E, F и G. Дополнително D е динамичка точка која може да се движи и уште правоаголникот конструиран на овој начин секогаш е впишан во триаголникот (Слика 4).

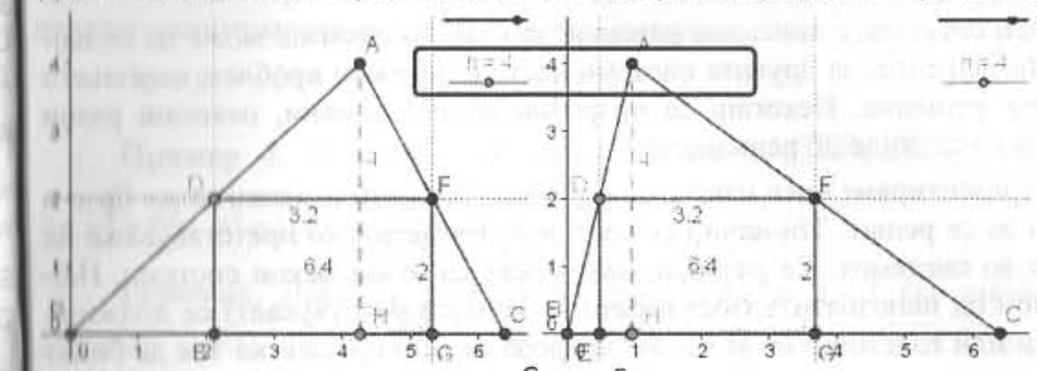


Користејќи својства на правоаголникот од Геогебра, плоштината на фигурата може да се покаже на екранот.

Десен клик на многуаголникот и од паѓачкото мени се избира Карактеристики. Се отвора нов прозорец.

Во јазичето за основно, за прикажи го името од паѓачкото мени изберете да се покаже Вредност. На овој начин на многуаголникот во средина ќе се запише неговата плоштина.

Сега на учениците може да им кажеме да ја поместуваат точката H и да видат дека плоштината на правоаголникот останува непроменета. (Слика 5)



Слика 5

Со направениот симулатор за триаголникот и впишаниот правоаголник во него на учениците им кажуваме да ја поместуваат точката D и да видат како се менува плоштината на правоаголникот и да забележат која е зависноста на страните на правоаголникот и страната и висината на триаголникот. Учениците може да работат и во групи да ги запишуваат добиените вредности во табела која ја има во Геогебра, а потоа да ги споредат добиените вредности за максималната плоштина на правоаголникот и зависноста на должината на страните и висината на правоаголникот и триаголникот.

Со оваа постапка учениците ќе можат да видат дека максималната плоштина на правоаголникот, се добива ако страните се половина од страната и висината на триаголникот.

Студија за екстремни вредности може да се направи многу повеќе со помош на Геогебра, со што би се илустрирале процесите кои се вклучени во задачите. На во оваа статија, ние само покажавме два примери каде користиме Геогебра за значително подобро разбирање на проблемите кои претходно се решени алгебарски, без примена на било кој вид динамичка илустрација.

Референци:

1. Линда Стојановска, Витомир Стојановски, Зоран Трифунов (2009) *Екстреми и нивна визуелизација во геометриски задачи од математика*. Научен собир, Битола

2. Fahlberg-Stojanovska L., Stojanovski V. (2009) *GeoGebra: Freedom to Explore and Learn*. Teaching Mathematics and its Applications. Oxford Journals, Oxford, UK, vol.26, no.1, pp.17-22. <http://teamat.oxfordjournals.org/cgi/content/abstract/hrp003>

3. Fahlberg-Stojanovska L., Stojanovski V., Bocevska A. (2008) *ICT in Math Education – Small Interactivities & Specific Goals*. 6th Intl CIIT,Bitola,MK. <http://www.ti-tfb.net/pd/edu/pdf/ciit_2008_LFS.pdf>

4. Lingefjärd, T. (2010) *Chapter 15: The Rebirth of Euclidean Geometry?* Model-centered Learning with GeoGebra: Theory and Practice in Mathematics Education (chapters are currently in peer-review).

5. Novak D., Fahlberg-Stojanovska L, DiRenzo A. (2010) *Chapter 10: Building Simulators with GeoGebra*, Model-centered Learning with GeoGebra: Theory and Practice in Mathematics Education (chapters are currently in peer-review).

ГЕОМЕТРИСКИ НАЧИН НА РЕШАВАЊЕ СИСТЕМИ РАВЕНКИ

1 дел

Јасмина Маркоска, Ѓорѓи Маркоски

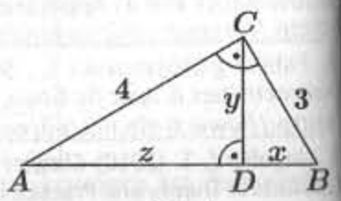
Освен системите линеарни равенки, за коишто секогаш може да се најде нивното решение, за другите системи често е потежок проблем наоѓањето на нивното решение. Некогаш се потребни повеќе замени, некогаш разни „финти“ за да се дојде до решението.

Ќе презентираме еден начин, со кој некои системи равенки може брзо и елегантно да се решат. Тој начин се состои во геометриско претставување на равенките во системот. Се разбира, ова успева само кај некои системи. Најчесто некои од непознатите (или изрази во коишто учествуваат) се должини на отсечки или големини на агли. Затоа треба да се води сметка тие да бидат позитивни.

Ќе наведеме неколку примери за ваквиот начин на геометриско решавање. Притоа, во примерите е направена и споредба со друг начин на решавање. Некаде дадени се и две решенија (геометриско и не геометриско).

Пример 1. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Ако важи $x^2+y^2=9$, $y^2+z^2=16$ и $y^2=xz$, пресметај ја вредноста на $xy+yz$.

Решение. 1 начин. Задачата може да ја решиме, ако прво го решиме системот равенки $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y^2+z^2=16 \\ y^2=xz \end{cases}$. Ако ги собереме првата и втората равенка добиваме $x^2+2y^2+z^2=25$. Со замена на третата равенка во последното равенство добиваме $(x+z)^2=5^2$. Оттука $x+z=5$ или $x+z=-5$. Но $x>0$ и $z>0$, па не може $x+z=-5$. Значи, $z=5-x$. Според тоа, $y^2=x(5-z)$ (од втората равенка во системот). Ако замениме во првата равенка добиваме $x^2+x(5-x)-9=0$. Решение на последнава равенка е $x=\frac{9}{5}$. Од $y^2=x(5-z)$ добиваме $y=\frac{12}{5}$. На крај, од $z=5-x$ добиваме $z=\frac{16}{5}$. Според тоа $xy+yz=\frac{9}{5}\cdot\frac{12}{5}+\frac{12}{5}\cdot\frac{16}{5}=\frac{300}{25}=12$.



црт. 1

2 начин. Во задачата не се бара да се реши системот. Треба да се подразбере дека се бара вредноста на $xy+yz$ без да се реши системот. Бидејќи x, y, z се позитивни реални броеви, задачата може да се претстави геометриски. Бидејќи $x^2+y^2=3^2$, од теоремата обратна на питагоровата, следува дека x, y се катети на правоаголен триаголник, а неговата хипотенуза има должина 3. Слично и од второто равенство следува дека y, z се катети на правоаголен триаголник со хипотенуза 4. Од третото равенство следува дека y е висина во правоаголниот триаголник со хипотенуза $x+z$ (од теоремата обратна на теоремата за пропорционални отсечки во правоаголен триаголник) (црт. 1). Сега, имаме

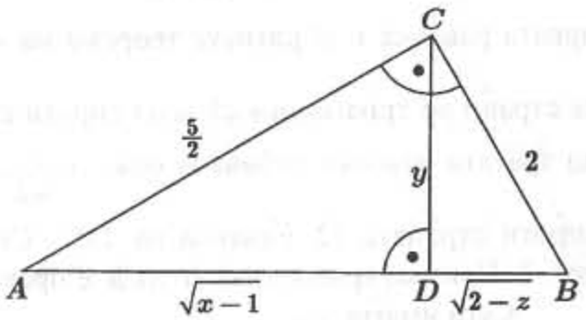
$$xy+yz=y(x+z)=2P_{\Delta ABC}=3\cdot 4=12.$$

Пример 2. Пресметај ја вредноста на $y\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2-z}\right)$, ако $y>0$, $x+y^2=\frac{29}{4}$, $y^2-z=2$ и $y^2=\sqrt{x-1}\sqrt{2-z}$.

Решение. Прво да забележиме дека $x\neq 1$ и $z\neq 2$ (во спротивно ќе добиеме $y=0$). Исто така од $x+y^2=\frac{29}{4}$ и $y^2=\sqrt{x-1}\sqrt{2-z}$ следува дека $1<x<\frac{29}{4}$. Слично, од $y^2=\sqrt{x-1}\sqrt{2-z}$ следува $z<2$.

1 начин. Со замена во $y^2=\sqrt{x-1}\sqrt{2-z}$ на $y^2=\frac{29}{4}-x$ и $y^2-2=z$, добиваме $\frac{29}{4}-x=\sqrt{x-1}\sqrt{4-y^2}$, па заменувајќи $y^2=\frac{29}{4}-x$ во оваа равенка, добиваме $\frac{29}{4}-x=\sqrt{x-1}\sqrt{x-\frac{13}{4}}$. Квадрирајќи и решавајќи ја добиената равенка имаме $x=\frac{789}{164}$. Натаму лесно се добива дека $z=\frac{18}{41}$ и $y=\frac{10}{\sqrt{41}}$ и дека добиените решенија припаѓаат на дефиниционата област на равенките. Сега вредноста на бараниот израз е 5.

2 начин. Повторно, решението на 1 начин, бара решавање на системот $\begin{cases} x+y^2=\frac{29}{4} \\ y^2-z=2 \\ y^2=\sqrt{x-1}\sqrt{2-z} \end{cases}$, а потоа пресметување на вредноста на дадениот израз. Тоа решение бара релативно многу пресметки. Сега, задачата да ја поставиме геометриски.



црт. 2

Бидејќи $x>1$ и $z<2$ имаме

$$x+y^2=\frac{29}{4}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}\right)^2+y^2=\frac{25}{4} \text{ и } y^2-z=2\Leftrightarrow y^2+\left(\sqrt{2-z}\right)^2=4.$$

Сега, имаме ситуација како во примерот 1 (црт. 2), па добиваме

$$y\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2-z}\right)=2P_{\Delta ABC}=\frac{5}{2}\cdot 2=5.$$

Пример 3. Нека x, y, z се позитивни реални броеви за кои важи

$$y^2+z^2=50,\ x^2+xy+\frac{y^2}{2}=169 \quad \text{и} \quad x^2+xz+\frac{z^2}{2}=144.$$

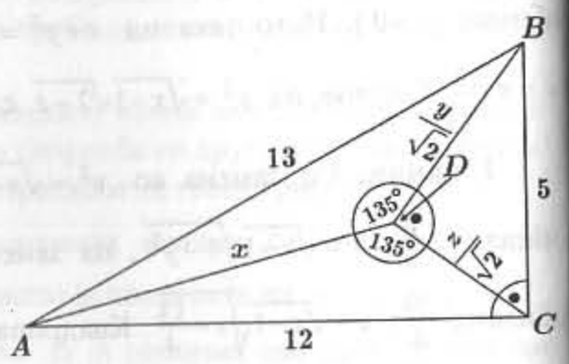
Најди ја вредноста на изразот $xy+yz+zx$.

Решение. За да се реши системот

$$\begin{cases} x^2+xy+\frac{y^2}{2}=169 \\ y^2+z^2=50 \\ x^2+xz+\frac{z^2}{2}=144 \end{cases}$$

потребни се повеќе смени и трансформации. Затоа, да го запишеме во следниов облик

$$\begin{cases} 13^2=x^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2-2x\frac{y}{\sqrt{2}}\cos 135^\circ \\ \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2=25 \\ 12^2=x^2+\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2-2x\frac{z}{\sqrt{2}}\cos 135^\circ \end{cases}$$



црт. 3

Бидејќи $x, y, z>0$, од втората равенка добиваме дека $\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{\sqrt{2}}, 5$ се страни на правоаголен триаголник. Од првата равенка и обратната теорема на косинусната добиваме дека $x, \frac{y}{\sqrt{2}}, 13$ се страни во триаголник со агол спроти страната 13 еднаков на 135°. Слично од третата равенка добиваме дека $x, \frac{z}{\sqrt{2}}, 12$ се страни во триаголник со агол спроти страната 12 еднаков на 135°. Според тоа, имаме ситуација како на црт. 3. Притоа, триаголникот ACB е правоаголен.

Сега имаме

$$P_{\Delta ADB}=\frac{1}{2}x\frac{y}{\sqrt{2}}\sin 135^\circ=\frac{1}{4}xy,$$

$$P_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}x\frac{z}{\sqrt{2}}\sin 135^\circ=\frac{1}{4}xz,$$

$$P_{\Delta BDC}=\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{2}}\frac{z}{\sqrt{2}}=\frac{1}{4}yz,$$

па

$$xy+yz+xz=4\left(P_{\Delta ADB}+P_{\Delta ADC}+P_{\Delta BDC}\right)=4P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}12\cdot 5=30.$$

Пример 4. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x^2+xz+z^2=9 \\ y^2+yz+z^2=36 \end{cases},$$

за $x, y, z>0$.

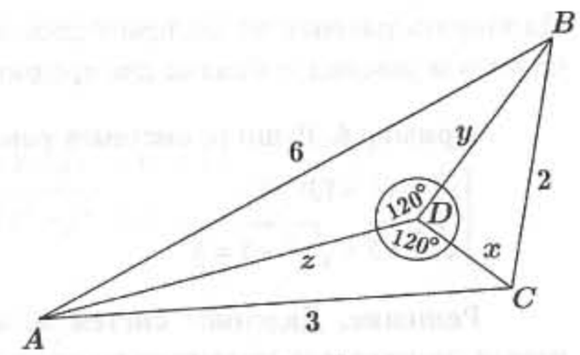
Решение. 1 начин. Ако ја одземеме втората од првата равенка добиваме $x(y-z)+y^2-z^2=-5$, т.е. $(y-z)(x+y+z)=-5$. Бидејќи $x+y+z>0$ следува дека $y-z<0$, т.е. $y<z$. Работејќи слично добиваме дека $x<y<z$. Сега од првата равенка добиваме $4=x^2+xy+y^2<3y^2$, па $y>\frac{2}{\sqrt{3}}$. Слично, од третата равенка добиваме дека $z>\sqrt{12}$. Сега, од втората равенка добиваме дека важи

$$9=x^2+xz+z^2>x^2+\sqrt{12}x+12, \text{ т.е.}$$

$$x^2+\sqrt{12}x+3<0, \text{ т.е. } \left(x+\sqrt{3}\right)^2<0,$$

што е невозможно.

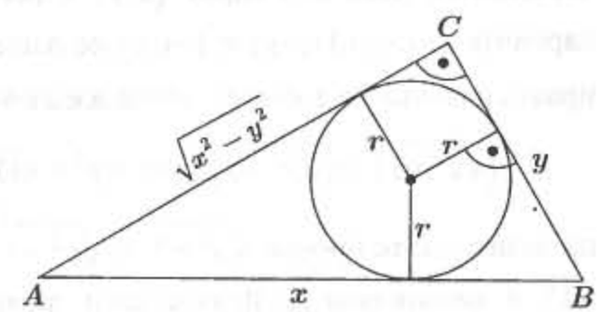
2 начин. Бидејќи $x, y, z>0$, задачата можеме да ја разгледуваме геометриски. Постапувајќи слично на примерот 3 ја добиваме геометриската интерпретација на црт. 4. Значи, добиваме дека постои триаголник со страни 2, 3, 6 што не е точно. Според тоа не постојат позитивни реални броеви x, y, z за кои важат дадените равенства.



црт. 4

Пример 5. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2-y^2}=48 \\ x+y+\sqrt{x^2-y^2}=24 \end{cases}, \text{ за } x>0.$$



црт. 5

Решение. 1 начин. Со смената $\sqrt{x^2-y^2}=\frac{48}{y}$ во втората равенка, може x да се изрази преку y, а потоа така добиено x се заменува во првата. Потоа се решава така добиената равенка со една непозната. Но, ова решение бара многу пресметки.

2 начин. Од првата равенка јасно е дека и $y>0$. Значи, задачата може да се разгледува геометриски. Бидејќи $y^2+\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^2=x^2$, добиваме дека y и $\sqrt{x^2-y^2}$ се катети во правоаголен триагоник, а x е неговата хипотенуза. Од

првата равенка во системот добиваме дека плоштината на тој триаголник е 24, а од втората дека неговиот периметар е 24 (црт. 5). Нека r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот, P неговата плоштина, а L неговиот периметар. Бидејќи $P=\frac{L}{2}r$, следува дека $r=2$. Во правоаголен триаголник со катети a,b, хипотенуза c, радиус на впишана кружница r важи

$$a+b-2r=a+b-2\frac{2P}{L}=a+b-4\frac{\frac{ab}{2}}{a+b+c}=a+b-\frac{2ab}{a+b+c}=$$
$$=\frac{a^2+ab+ac+ba+b^2+bc-2ab}{a+b+c}=\frac{c^2+ac+bc}{a+b+c}=c.$$

Според тоа во нашава задача имаме

$$x=y+\sqrt{x^2-y^2}-2r=y+\sqrt{x^2-y^2}-4.$$

Од втората равенак во системот добиваме $x+x+4=24$ и оттука $x=10$. Сега од првата равенка добиваме две вредности за y. Тоа се $y_1=6$, $y_2=8$.

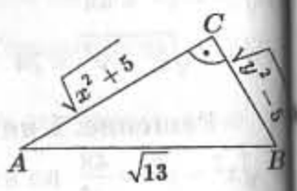
Пример 6. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5 \end{cases}.$$

Решение. Дадениот систем може да се реши со замена. Ако x^2 се изрази од првата и се замени во втората равенка, а потоа се изврши квадрирање, ќе се добие решение.

Ние ќе го разгледаме геометрискиот начин на решавање. Прво да забележиме дека ако парот (x,y) е решение на дадениот систем, тогаш парови те $(-x,-y),(x,-y)$ и $(-x,y)$ се решенија. Уште и $y\neq 5$, во спротивно од првата равенка ќе добиеме $x^2=8$ а од втората $x^2=20$. Натаму, важи

$$\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2+\left(\sqrt{y^2-5}\right)^2=x^2+y^2=\sqrt{13}^2,$$



црт. 6

па позитивните броеви $\sqrt{x^2+5}$ и $\sqrt{y^2-5}$ се катети, а $\sqrt{13}$ е хипотенуза во правоаголен триаголник (црт. 6). Ако ги означиме катетите со a и b а хипотенузата со c добиваме $a+b=5$ и $a^2+b^2=13$. Оттука $a^2+(5-a)^2=13$. Решенија на оваа равенка се $a_1=2$ и $a_2=3$, па $b_1=3$ и $b_2=2$. Според тоа $\sqrt{x^2+5}=2$ или $\sqrt{x^2+5}=3$. Бидејќи $\sqrt{x^2+5}\geq\sqrt{5}>2$ равенството $\sqrt{x^2+5}=2$ не е можно. Значи, $\sqrt{x^2+5}=3$, па $x=2$ или $x=-2$. Оттука $y=3$ или $y=-3$. Според тоа сите парови решенија се $(2,3)$, $(-2,-3)$, $(-2,3)$ и $(2,-3)$.

Задачи:

1. При услови како во примерот 1, најди ги $\frac{x}{y}$ и $\frac{z}{y}$.

2. Нека x,y,z се позитивни реални броеви за кои важи $x^2=xy+\frac{y^2}{3}=25$, $\frac{y^2}{3}+z^2=9$ и $z^2+xz+x^2=16$. Пресметај ја вредноста на изразот $xy+2yz+3xz$.

Одговор. $24\sqrt{3}$

3. Нека $x,y,z>0$ и за нив важи $x+y+z=60$, $x^2+y^2=z^2$ и $xy=12z$. Скицирај ја геометриската ситуација за x,y,z.

4. За позитивните релани броеви x,y,z важи $x^2+\frac{y^2}{3}+\frac{xy}{\sqrt{3}}=625$, $\frac{y^2}{3}+z^2+\frac{yz}{\sqrt{3}}=49$ и $x^2+y^2+xz=576$. Не решавајќи го системот, пресметај ја вредноста на изразот $3xz+y(x+z)$.

5. Реши го системот равенки $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$, за $x>0$.

Литераура:

[1] Г. З. Генкин, *Геометрические решения негеометрических задач*, Москва, 2007.

[2] Учебници по математика за втора и трета година од средното образование.

[3] Учебник по алгебра за трета година од средното образование, Природно-математичко подрачје.

Наградна задача

Определи ги сите реални функции f такви што

$$f(f(x)-y^2)=(x-y)^2 f(x+y),$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Задача на бројот Сигма 91

Нека $n>1$ е природен број и $S_n=1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n$. Да се докаже дека:

а) n^2 го дели S_n за секој непарен број n.

б) n^3 го дели S_n за бесконечно многу n.

СЕУМНАЕСЕТТА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Скопје, 11.IV.2010 година

17-та македонска математичка олимпијада

1. Да се реши равенката

$$x^3+2y^3-4x-5y+z^2=2012,$$

во множеството цели броеви.

Решение. Лесно се покажува дека за секој цел број a важи $3\mid a^3-a$, и дека квадрат на цел број при делење со 3 може да даде остаток 0 или 1.

Сега дадената равенка е еквивалентна со $x^3-x+2(y^3-y)-3(x-y)+z^2=2012$ од каде поради претходното и поради тоа што $2012\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$ добиваме дека $z^2\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$, што не е можно. Според ова дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи $a+b+c=3$. Да се докаже неравенството

$$\frac{a^3+2}{b+2}+\frac{b^3+2}{c+2}+\frac{c^3+2}{a+2}\ge 3.$$

Решение. Од Неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$\frac{a^3+2}{b+2}=\frac{a^3+1+1}{b+2}\ge\frac{3\sqrt[3]{a^3\cdot 1\cdot 1}}{b+2}=\frac{3a}{b+2}.$$

Аналогно се добиваат и неравенствата

$$\frac{b^3+2}{c+2}\ge\frac{3b}{c+2}\quad\text{и}\quad\frac{c^3+2}{a+2}\ge\frac{3c}{a+2}.$$

Сега имаме

$$\frac{a^3+2}{b+2}+\frac{b^3+2}{c+2}+\frac{c^3+2}{a+2}\ge 3\left(\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\right)\qquad(1)$$

Понатаму од Неравенството на Коши-Буњаковски-Шваец имаме

$$\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}=\frac{a^2}{a(b+2)}+\frac{b^2}{b(c+2)}+\frac{c^2}{c(a+2)}\ge$$

$$\ge\frac{(a+b+c)^2}{a(b+2)+b(c+2)+c(a+2)}=\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+2(a+b+c)}\qquad(2)$$

Од очигледното неравенство $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ следува точноста на

$$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)\quad\text{т.е.}\quad\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{3}{(a+b+c)^2}\qquad(3)$$

Сега од (2) и (3) добиваме

$$\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+2(a+b+c)}\ge\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2/3+2(a+b+c)}=$$

$$=\frac{3(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+6(a+b+c)}=\frac{3(a+b+c)}{(a+b+c)+6}\qquad(4)$$

Конечно од (1), (4) и условот $a+b+c=3$ добиваме

$$A\ge 3\left(\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\right)\ge\frac{9(a+b+c)}{(a+b+c)+6}=3$$

што и требаше да се докаже. Равенство важи акко $a=b=c=1$.

3. Вкупно 2010 парички се распоредени во 5 кутии. На почетокот количините на парички во кутиите се последователни природни броеви. Марта треба да избере и да си земе една од кутиите, но претходно смее конечен број пати да ја направи следнава трансформација: од кутија во која има барем четири парички да префрли по една паричка во секоја од преостанатите кутии.

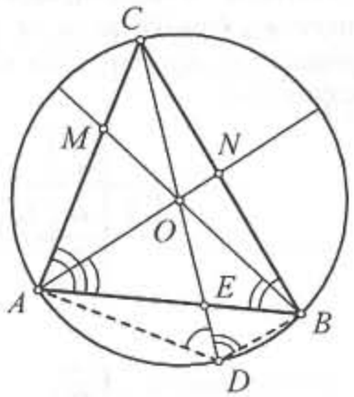
Со колку најмногу парички може да си замине Марта?

Решение. Со $x_i(n)$ ја означуваме количината парички во i-тата кутија после n трансформации. На почетокот $x_1(0),x_2(0),\dots,x_5(0)$ се последователни природни броеви. Да забележиме дека за $i\ne j$ важи $x_i(n)-x_j(n)\equiv_5 x_i(n+1)-x_j(n+1)$.

Значи, ако $x_i(n),x_j(n)$ не се конгруентни по модул 5 тогаш $x_i(n+1),x_j(n+1)$ не се конгруентни по модул 5. Од тука за секој $n\in\mathbb{N}_0$, $x_1(n),x_2(n),\dots,x_5(n)$ даваат различни остатоци по модул 5, т.е. гледани во $\mathbb{Z}_5$ тие се $0,1,2,3,4$ во некој редослед. Затоа, Марта не може да си замине со повеќе од $2010-(0+1+2+3)=2004$ парички.

Толку парички може да се соберат во една кутија со следната постапка: Во секој чекор ако втората по количина на парички кутија има барем четири парички од неа префрламе во другите, ваков чекор не е можен само во момент кога распределбата по кутии е $0,1,2,3,2004$ парички гледано во растечки редослед.

4. Точката O е центар на опишаната кружница на остроаголниот ΔABC. Правата AO ја сече страната BC во точка N, а правата BO страната AC во точка M. Да се докаже дека, ако $\overline{CM}=\overline{CN}$, тогаш $\overline{AC}=\overline{BC}$.



Решение. Нека $\overline{CM}=\overline{CN}$, и нека претпоставиме спротивно, т.е. нека

$$\overline{AC}>\overline{BC}.\qquad(1)$$

Тогаш

$\sphericalangle ABC>\sphericalangle BAC$ т.е. $\sphericalangle ADC=\sphericalangle ABC>\sphericalangle BAC=\sphericalangle BDC$.

Од тука следува дека $\sphericalangle ACD<\sphericalangle BCD$ т.е.

$$\sphericalangle ACE<\sphericalangle BCE\ (\sphericalangle DAC=\sphericalangle DBC=90^\circ).$$

Но $\sphericalangle AOE=2\sphericalangle ACE$ и $\sphericalangle BOE=2\sphericalangle BCE$.

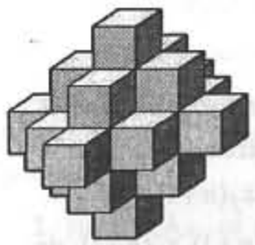
Па следува

$\sphericalangle AOE<\sphericalangle BOE$ т.е. $\overline{AE}<\overline{BE}$ ($\triangle ABO$ е рамнокрак).

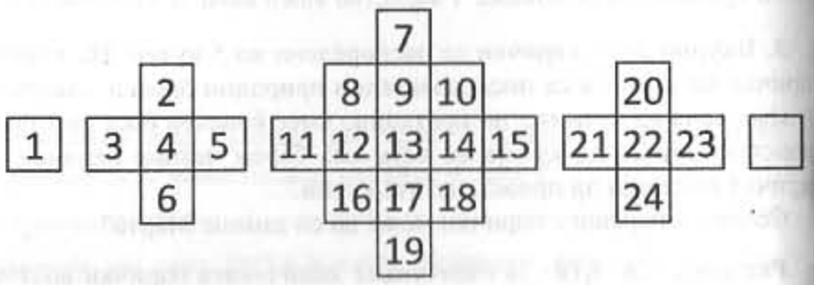
Од Теоремата на Чева имаме $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{EA}}=1$, и важи $\overline{CM}=\overline{CN}$ (од услов). Па добиваме $\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{BE}}<1$ т.е. имаме $\overline{AC}=\overline{AM}+\overline{CM}=\overline{AM}+\overline{CN}<\overline{BN}+\overline{CN}=\overline{BC}$, што е во контрадикција со (1).

Аналогно се покажува дека неможе да важи $\overline{AC}<\overline{BC}$. Па ќе следува дека $\overline{AC}=\overline{BC}$.

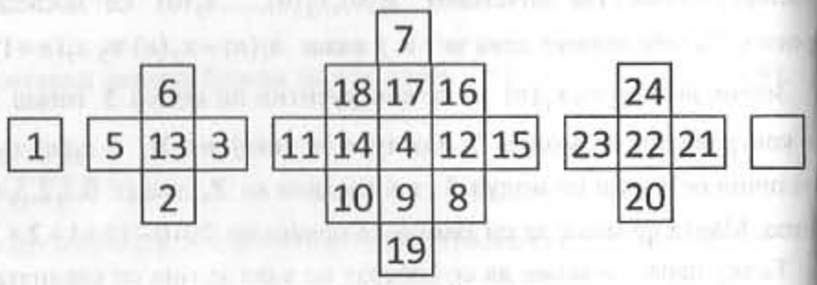
5. Нека коцките на сликата 1 се обележани како на сликата 2 подолу(од горе надолу во слоеви). Во еден потег дозволено е празната коцка да си го замени местото со некоја коцка соседна на неа (две коцки се соседни ако имаат заедничка страна).Дали после конечно многу потези може да се добие подредување на броевите како на сликата 3.



Слика 1



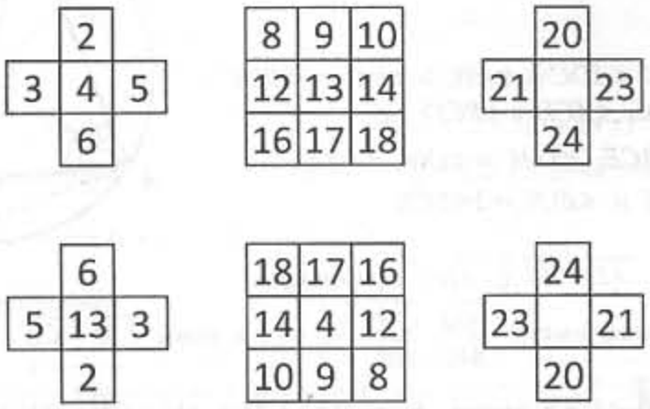
Слика 2



Слика 3

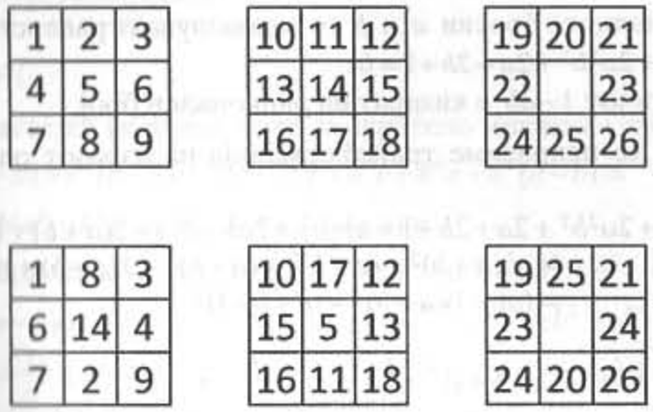
Нека коцките на сликата се обележани како на сликата подолу. Во еден потез дозволено е празното квадратче да си го замени местото со некое квадратче соседно на него (две квадратчиња се соседни ако имаат заедничка страна). Дали после конечно многу потези може да се добие подредување на броевите како во вториот ред.

Решение. Квадратчињата со броеви 1, 7, 11, 15, 19 и 22 не можеме да ги изместиме, бидејќи за да се поместат празното мора да биде во ќош, а потоа при враќањето на празното поле и ова поле ќе се врати на своето место. Затоа задачата ја сведуваме на:



Да претпоставиме дека после конечно многу потерзи можеме да ја добиеме бараната позиција. Тогаш истото може да се направи и ако се додадат квадратчиња за да се дополни до коцка. И со запишување нови броеви треба ќе се добијат нова

почетна и крајна ситуација:



Разгледуваме пермутација во секој од потезите што сме ги направиле. Полињата ги ставаме по редоследот на броевите, а празното поле го прескокнуваме во чекорите во кои не се наоѓа на крајот. На почетокот пермутацијата е идентична. Во секој чекор парноста на пермутацијата не се менува бидејќи секогаш преместуваме поле парен број места назад или напред или пермутацијата останува иста.

Од друга страна почетната и крајната пермутација се со различна парност, па не можеме да ја добиеме крајната ситуација.

Решение на задача на бројот Сигма 90

На еден турнир учествувале 16 екипи и одиграле 55 утакмици. Докажи дека постојат три екипи, така што било кои две од нив не играле меѓу себе.

Решение. Нека претпоставиме спротивно. Нека A е една од екипите кои одиграле најмал број на утакмици k на турнирот. Секоја екипа која играла со екипата A одиграла барем k утакмици. Во спротивен случај A не би била екипа со најмал број на одиграни утакмици.

Значи A и екипита кои играле со A заедно одиграле $\frac{1}{2}(k^2+k)$ утакмици.

Преостанатите $15-k$ екипи, кои не играле со екипата A, секоја играла со преостанатите $14-k$ екипи. Тие меѓусебно одиграле

$$\frac{1}{2}(15-k)(14-k)$$

утакмици(во спротивно би добиле контрадикција со почетната претпоставка; такви две екипи, кои не би одиграле со меѓу себе, заедно со екипата A би биле три екипи кои не играле попарно меѓу себе).

Според тоа, биле одиграни најмалку

$$\frac{1}{2}[k^2+k+(15-k)(14-k)]=k^2-14k+105=(k-7)^2+56\geq 56>55,$$

што е во спротивност со условот од задачата.

Значи, постојат три екипи, од 15-те екипи, така што било кои две од нив не играле меѓу себе.

Рубрика задачи СИГМА 90 – решенија

1156. Рационалните броеви a и b го задоволуваат равенството

$$a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1=0.$$

Докажи дека бројот $1-ab$ е квадрат на рационален број.

Решение 1. Ќе направиме трансформација на изразот од левата страна на равенството

$$\begin{aligned}a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1&=ab(a^2+2ab+b^2)+2(a+b)+1=\\&=ab(a+b)^2-(a+b)^2+(a+b)^2+2(a+b)+1=\\&=(ab-1)(a+b)^2+(a+b+1)^2\end{aligned}$$

Сега, од

$$(ab-1)(a+b)^2+(a+b+1)^2=0,$$

Имаме

$$1-ab=\frac{(a+b+1)^2}{(a+b)^2}=\left(\frac{a+b+1}{a+b}\right)^2.$$

Бидејќи $\frac{a+b+1}{a+b}$ е рационален број кога $a,b\in\mathbb{Q}$, $a+b\neq 0$, следува решение на задачата. Случајот $a+b=0$ не е можен, бидејќи тогаш би добиле $0=1$.

Решение 2. Ако даденото равенство го помножиме со ab тоа го добива обликот

$$a^4b^2+a^2b^4+2a^3b^3+2a^2b+2b^2a+ab=0.$$

Сега со трансформации добиваме

$$a^2b^2(a^2+2ab+b^2)+2ab(a+b)+1=1-ab$$

$$1-ab=[ab(a+b)]^2+2ab(a+b)+1=[ab(a+b)+1]^2,$$

т.е. $1-ab=[ab(a+b)+1]^2$, што требаше да се докаже.

1157. Целите броеви a,b,c и d се такви што $bc+ad=1$ и $ac+2bd=1$. Докажи дека $a^2+c^2=2b^2+2d^2$.

Решение. Од условот $bc+ad=1$ имаме $2(ad+bc)^2=2$, односно

$$2b^2c^2+4abcd+2a^2d^2=1. \qquad (*)$$

Од условот $ac+2bd=1$ имаме $(ac+2bd)^2=1$, односно

$$a^2c^2+4abcd+4b^2d^2=1. \qquad (**)$$

Од (*) и (**) добиваме

$$2b^2c^2+2a^2d^2-a^2c^2-4b^2d^2=-1$$

$$(a^2-2b^2)(2d^2-c^2)=1.$$

Бидејќи a,b,c и d се цели броеви, имаме

$$a^2-2b^2=2d^2-c^2=1$$

$$a^2-2b^2=2d^2-c^2=-1,$$

а и во двата случаи

$$a^2+c^2=2b^2+2d^2.$$

1158. Нека a,b и c се различни меѓу себе цели броеви. Докажи дека

$$\frac{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

исто така цел број.

Решение. Користејќи ги формулите за скратено множење имаме

$$\begin{aligned}a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)&=a^4b-a^4c+b^4c-b^4a+c^4(a-b)=\\&=ab(a^3-b^3)-c(a^4-b^4)+c^4(a-b)=\\&=ab(a-b)(a^2+ab+b^2)-c(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)+c^4(a-b)=\\&=(a-b)(a^3b+a^2b^2+ab^3-ca^3-ca^2b-cab^2-cb^3+c^4)=\\&=(a-b)[a^3(b-c)+a^2b(b-c)+ab^2(b-c)-c(b^3-c^3)]=\\&=(a-b)(b-c)(a^3+a^2b+ab^2-cb^2-c^2b-c^3)=\\&=(a-b)(b-c)[(a^3-c^3)+b(a^2-c^2)+b^2(a-c)]=\\&=(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\end{aligned}$$

Сега е очигледно дека

$$\frac{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\in\mathbb{Z}.$$

1159. За природните броеви a,b и c, $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ е исто така природен број. Докажи дека и

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$$

исто така природен број.

Решение. Со алгебарски трансформации добиваме

$$\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}=\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}\frac{b\sqrt{3}-c}{b\sqrt{3}-c}=\frac{3ab-bc+\sqrt{3}(b^2-ac)}{3b^2-c^2}=\frac{3ab-bc}{3b^2-c^2}+\sqrt{3}\frac{b^2-ac}{3b^2-c^2}$$

Броевите $\frac{3ab-bc}{3b^2-c^2}$ и $\frac{b^2-ac}{3b^2-c^2}$ се рационални, па заради ирационалноста на $\sqrt{3}$, за да $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ е цел број потребно е и доволно да $\frac{b^2-ac}{3b^2-c^2}=0$. Значи $b^2=ac$ и

$$\begin{aligned}\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}&=\frac{(a+b+c)^2-2ab-2bc-2ac}{a+b+c}=a+b+c-2\frac{ab+bc+b^2}{a+b+c}=\\&=a+b+c-2b\frac{a+c+b}{a+b+c}=a+b+c-2b=a+c-b\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

1160. Квадратните равенки $x^2+a_ix+b_i=0$, $i=\overline{1,8}$ имаат заеднички корен $x=2$, а збирот на другите корени е 2008. Докажи дека корените на равенката

$$x^2+\frac{a_1+a_2+...+a_8}{8}x+\frac{b_1+b_2+...+b_8}{8}=0$$

се прости броеви.

Решение. Нека заедничкиот корен на осумте равенки е $x=2$, а другите корени се $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$, при што

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=2008.$$

Според Виетовите правила

$$a_i=-x-x_i$$

$$b_i=xx_i,$$

$i=1,2,...,8$. Но тогаш

$$\frac{a_1+a_2+...+a_8}{8}=\frac{(-x-x_1)+(-x-x_2)+...+(-x-x_8)}{8}=-\frac{16+2008}{8}=-253$$

$$\frac{b_1+b_2+...+b_8}{8}=\frac{xx_1+xx_2+...+xx_8}{8}=\frac{x(x_1+x_2+...+x_8)}{8}=\frac{2\cdot 2008}{8}=502.$$

Квадратната равенка е

$$x^2-253x+502=0,$$

нејзини решенија се 2 и 251 кои се прости броеви.

1161. Броевите a и b се рационални. Докажи дека корените на равенката

$$(a^2-b^2)x^2+ab=(a^2+b^2)x$$

се исто така рационални броеви.

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик

$$(a^2-b^2)x^2-(a^2+b^2)x+ab=0.$$

Во случајот за ненулти a и b, такви што $|a|\neq|b|$ нејзините решенија се

$$x_{1/2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2-4ab(a^2-b^2)}}{2(a^2-b^2)}.$$

Да забележиме дека

$$(a^2+b^2)^2-4ab(a^2-b^2)=a^4+2a^2b^2+b^4-4a^3b+4ab^3=(a^2-2ab-b^2)^2.$$

Според тоа, решенијата на равенката се

$$x_{1/2}=\frac{a^2+b^2\pm(a^2-2ab-b^2)}{2(a^2-b^2)},$$

односно

$$x_1=\frac{2b^2+2ab}{2(a^2-b^2)}=\frac{b}{a-b},\qquad x_2=\frac{2a^2-2ab}{2(a^2-b^2)}=\frac{a}{a+b}.$$

Ако $a=b=0$, тогаш решение е секој реален број x.

Ако $a=b\neq 0$, тогаш решение е $x=\frac{1}{2}$.

Ако $a=-b\neq 0$, тогаш решение е $x=-\frac{1}{2}$.

Други случаи нема. Јасно е дека сите решенија се рационални.

1162. Докажи дека равенката

$$3(a+b+c)x^2+4(ab+bc+ca)x+4abc=0$$

има реални решенија за секои $a,b,c\in\mathbb{R}$. При кои услови решенијата се еднакви меѓу себе?

Решение. Ќе ја пресметаме дискриминантата на квадратната равенка

$$D=16(ab+bc+ca)^2-48(a^2bc+b^2ac+c^2ab)=$$
$$=16(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2b^2ac+2c^2ab-3a^2bc-3b^2ac-3c^2ab)=$$
$$=16(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-b^2ac-c^2ab)$$

Од друга страна

$$(ab-bc)^2=a^2b^2+b^2c^2-2b^2ac\geq 0$$
$$(ba-ac)^2=a^2b^2+a^2c^2-2a^2cb\geq 0$$
$$(bc-ca)^2=c^2a^2+b^2c^2-2c^2ba\geq 0$$

и последните три равенства со алгебарски трансформации, добиваме

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-b^2ac-c^2ab=$$
$$=\frac{1}{2}(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab)=$$
$$=\frac{1}{2}[(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2]\geq 0$$

Значи, за било кои $a,b,c\in\mathbb{R}$, $D=8[(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2]\geq 0$.

Равенката ќе има двоен корен ако и само ако $D=0$, од каде што добиваме

$$ab=bc=ca.$$

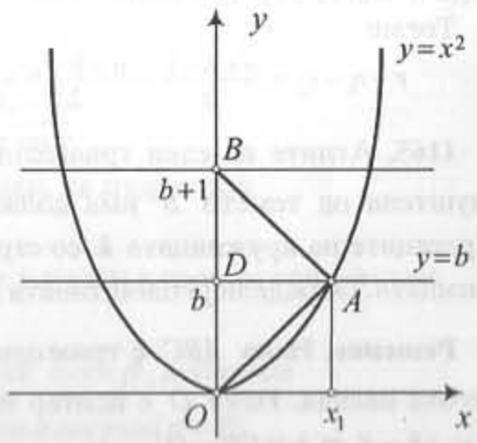
Оваа низа од равенства е можна ако и само ако

а) $a=b=c=0$

б) $a\neq 0$, $b=c$ или $b\neq 0$, $a=c$ или $c\neq 0$, $a=b$.

в) $a\neq 0, b\neq 0$ или $b\neq 0, c\neq 0$ или $c\neq 0, a\neq 0$, но тогаш $a=b=c\neq 0$.

1163. Правите l_1 и l_2 се паралелни со апсцисната оска, а растојанието меѓу нив е еднакво на 1 (правата l_1 е поблиску до апсцисната оска). Правата l_1 и параболата $y=x^2$ се сечат во точката A а правата l_2 и ординатната оска се сечат во точката B. Пресметај ја вредноста на $\angle OAB$ каде O е координатниот почеток.



Решение. Нека равенките на правите $l_1: y=b$ и $l_2: y=b+1$. Ако x_1 е апсцисата на точката A тогаш нејзината ордината е $x_1^2=b$ (види цртеж). Нека пресечната точка на l_1 и ординатната оска е точката D.

Од правоаголниот ΔAOC имаме:

$$\overline{OA}^2=x_1^2+(x_1^2)^2=b+b^2.$$

Од условите на задачата, за правоаголниот триаголник ABD, имаме

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = b+1.$$

Бидејќи $\overline{OB} = b+1$, имаме

$$\overline{OB}^2 = (b+1)^2 = b^2+2b+1 = (b^2+b)+(b+1) = \overline{AO}^2 + \overline{AB}^2.$$

Според обратната теорема на Питагора, триаголникот ΔOAB е правоаголн со хипотенуза OB. Значи, $\measuredangle OAB = 90^\circ$.

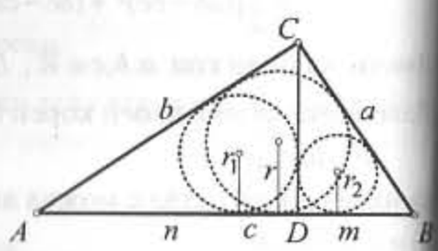
1164. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C, радиус на впишаната кружница и CD е негова висина. Ако r_1 и r_2 се радиуси на впишаните кружници во триаголниците ADC и CDB соодветно, пресмет го збирот

$$r + r_1 + r_2.$$

Решение. Нека a,b,c се должини на страните на триаголникот, а n и m должини на проекциите на катетите AC и BC врз хипотенузата AB.

Според тоа,

$$P = \frac{ab}{2} \quad \text{и} \quad P = \frac{a+b+c}{2}r,$$



од каде добиваме $\frac{ab}{2} = \frac{a+b+c}{2}r$, односно

$$r = \frac{ab}{a+b+c}. \qquad (1)$$

Од Питагорина теорема

$$c^2 = a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$ab = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2}.$$

Со замена во (1) добиваме $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Сега, за триаголниците ADC и CDB имаме

$$r_1 = \frac{n+h-b}{2} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{m+h-a}{2},$$

каде h е должина на висината CD.

Тогаш

$$r + r_1 + r_2 = \frac{a+b-c}{2} + \frac{n+h-a}{2} + \frac{m+h-b}{2} = \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h.$$

1165. Аглите на еден триаголник се α, β и γ. Висината на триаголник спуштена од темето B има должина H и е дијаметар на кружницата Пресеците на кружницата k со страните BA и BC се поврзани со краевите висината. Определи ја плоштината на добиениот четириаголник.

Решение. Нека ABC е триаголник во кој α, β, γ се негови агли и $\overline{BN} = H$ негова висина. Нека O е центар на кружницата k со дијаметар BN при ш $k \cap AB = E$ и $k \cap CB = D$.

Четириаголникот $BDNE$ е тетивен. Според тоа

$$\measuredangle DNE = 180^\circ - \measuredangle EBD$$

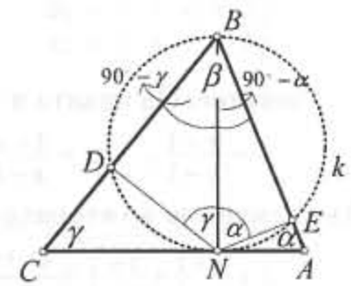
$$P_{DNEB} = P_{BDE} + P_{DNE} = \frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{BE}\sin\beta + \frac{1}{2}\overline{ND}\cdot\overline{NE}\sin(180^\circ - \beta) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\beta(\overline{BD}\cdot\overline{BE} + \overline{ND}\cdot\overline{NE})$$

Од триаголникот BDN, бидејќи $\measuredangle DBN = \measuredangle CBN = 90^\circ - \gamma$, имаме

$$\overline{BD} = H\cos(90^\circ - \gamma) = H\sin\gamma$$

$$\overline{DN} = H\sin(90^\circ - \gamma) = H\cos\gamma$$



Од триаголникот BEN, бидејќи $\measuredangle EBN = \measuredangle ABN = 90^\circ - \beta$, имаме

$$\overline{BE} = H\cos(90^\circ - \alpha) = H\sin\alpha$$

$$\overline{EN} = H\sin(90^\circ - \alpha) = H\cos\alpha.$$

Сега,

$$P = \frac{1}{2}\sin\beta(H^2\sin\alpha\sin\gamma + H^2\cos\alpha\cos\gamma) = \frac{1}{2}H^2\sin\beta\cos(\alpha-\gamma).$$

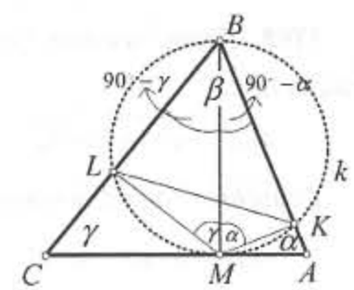
1166. Во триаголникот ABC висината BM е дијаметар на кружница k, која страната AB ја сече во точката K а страната BC во точката L. Ако $\measuredangle A = \alpha$ и $\measuredangle C = \gamma$ колку е односот нап лоштините на триаголниците KLM и ABC.

Решение. Од условот на задачата $BM \perp AC$, $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle ACB = \gamma$. Точките K и L се пресеци на кружницата k, со дијаметар BM, со страните AB и BC соодветно(види цртеж).

Ако $\overline{BM} = h$, тогаш од правоаголните триаголни- и CMB и BMC, имаме

$$\overline{AM} = h\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\overline{CM} = h\operatorname{ctg}\gamma$$



$$P = P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\overline{AM}\cdot\overline{BM} + \frac{1}{2}\overline{CM}\cdot\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BM}(\overline{AM} + \overline{CM}) =$$

$$= \frac{1}{2}h(h\operatorname{ctg}\alpha + h\operatorname{ctg}\gamma) = \frac{1}{2}h^2\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}.$$

Триаголниците BMA и BMC се правоаголни, па според тоа

$$\measuredangle ABM = 90^\circ - \alpha, \qquad \measuredangle CBM = 90 - \gamma,$$

од тоа што триаголниците BKM и BLM се исто така правоаголни, имаме

$$\measuredangle BMK = \alpha, \qquad \measuredangle BML = \gamma.$$

Сега, $\overline{KM} = h\cos\alpha$, $\overline{LM} = h\cos\gamma$, и од $\measuredangle LMK = \alpha + \beta$, добиваме

$$P_{\Delta KLM} = \frac{1}{2}h\cos\alpha h\cos\gamma\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}h^2\cos\alpha\cos\gamma\sin(\alpha+\beta).$$

Конечно,

$$\frac{P_{\Delta KLM}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}h^2\cos\alpha\cos\gamma\sin(\alpha+\gamma)}{\frac{1}{2}h^2\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}}=\cos\alpha\cos\gamma\sin\alpha\sin\gamma=$$

$$=\frac{1}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin\gamma\cos\gamma)=\frac{1}{4}\sin 2\alpha\sin 2\gamma.$$

1167. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases}1+x+y=xy\\2+y+z=yz\\3+z+x=zx\end{cases}$$

Решение. Од првата и третата равенка имаме

$$y=\frac{x+1}{x-1},\qquad z=\frac{3+x}{x-1}.$$

Ако замениме во втората равенка, добиваме

$$2+\frac{x+1}{x-1}+\frac{3+x}{x-1}=\frac{(x+1)(3+x)}{(x-1)^2},$$

од каде по средувањето се добива

$$3x^2-6x-5=0.$$

Нејзини решенија се $x=\frac{3\pm2\sqrt{6}}{3}$. Сега $y=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$ и $z=1\pm\sqrt{6}$ а решенија системот се

$$\left(\frac{3+2\sqrt{6}}{3},\frac{2+\sqrt{6}}{2},1+\sqrt{6}\right)\text{ и }\left(\frac{3-2\sqrt{6}}{3},\frac{2-\sqrt{6}}{2},1-\sqrt{6}\right).$$

1168. Дали постои бесконечна низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ од позитивни реални броеви таква што

$$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}.$$

Решение. Од позитивноста на низата, т.е. од условот $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$ имаме

$$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}>0,$$

Значи $\sqrt{x_{n+1}}>\sqrt{x_n}$, $n\in\mathbb{N}$, и заради $x_{n+1},x_n>0$ со квадрирање на последно неравенство добиваме

$$x_{n+1}>x_n.$$

Од произволноста на $n\in\mathbb{N}$ добиваме дека низата е строго монотон растечка.

Заради последното неравенство, и од дефинцијата на низата добиваме

$$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}<\sqrt{x_{n+1}}<\sqrt{x_{n+2}}.$$

Со квадрирање на неравенството $x_{n+2}<\sqrt{x_{n+2}}$, добиваме $x_{n+2}^2<x_{+2}$, а зара позитивноста на низата

$$x_{n+2}<1.$$

Низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е строго монотона и ограничена низа, па таа е и конвергентна. Бидејќи $x_n<1$ и е строго монотоно растечка, имаме

$$0<\lim_{n\to\infty}x_n=c\le 1.$$

Но од равенствата

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+2}=c,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{x_{n+1}}=\sqrt{c}\ \text{ и }\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{c}$$

(бидејќи $\lim_{n\to\infty}x_n=c$) добиваме

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_{n+1}}-\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}$$

$$c=\sqrt{c}-\sqrt{c}=0,$$

что не е можно, бидејќи $0<c\le 1$.

Значи, таква низа не постои.

1169. За низата реални броеви $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е исполнето $|a_{n+1}-a_n|<1$, за секое $n\in\mathbb{N}$.

а) Докажи дека за секои $m,n\in\mathbb{N}$ е исполнето $|a_m-a_n|\le|m-n|$.

б) Ако $b_n=\frac{1}{n}(a_1+a\ \ +...+a_n)$, $n\in\mathbb{N}$, докажи дека $|b_{n+1}-b_n|\le\frac{1}{2}$.

Решение. а) Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $m>n$. Тогаш, од особините на апсолутна вредност

$$|a_m-a_n|=|a_m-a_{m-1}+a_{m-1}-a_{m-2}+a_{m-2}-...+a_{n+1}-a_n|\le$$
$$\le|a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+...+|a_{n+1}-a_n|\le\underbrace{1+1+1+..+1}_{m-n\text{ пати}}=m-n=|m-n|.$$

б) Од самата дефинција на низата $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ имаме

$$|b_{n+1}-b_n|=\left|\frac{a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right|=\left|\frac{na_{n+1}-a_1-a_2-...-a_n}{n(n+1)}\right|=$$

$$=\left|\frac{a_{n+1}-a_1+a_{n+1}-a_2+...+a_{n+1}-a_n}{n(n+1)}\right|\le\frac{|a_{n+1}-a_1|+|a_{n+1}-a_2|+...+|a_{n+1}-a_n|}{n(n+1)}\le$$

$$\le\frac{n+(n-1)+....+3+2+1}{n(n+1)}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+1)}=\frac{1}{2}.$$

1170. Седум природни броеви формираат аритметичка прогресија со разлика $d=30$. Точно еден член од прогресијата е делив со 7. Докажи!

Решение. Членовите на аритметичката прогресија се

$$a,\quad a+30,\quad a+2\cdot30,\quad a+3\cdot30,\quad a+4\cdot30,\quad a+5\cdot30,\quad a+6\cdot30.$$

Разликата на два члена од ова прогресија е еднаква на

$$30(m-n),$$

за некои $m,n\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Бидејќи $(7,30)=1$, добиваме $7\,|\,30(m-n)$ ако и само ако $7\,|\,m-n$.

Но $7 \nmid m-n$ за $m,n \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $m \neq n$.

Според тоа, не постојат два члена на прогресијата кои имаат ист остаток при делење со 7. Ако r_i е остаток од делењето на $a+30i$ со 7, $i=0,1,2,3,4,5,6$, тогаш

$$\{r_0,r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6\}=\{0,1,2,3,4,5,6\}.$$

Значи, постои r_i таков што $r_i=0$. Со други зборови некој член на прогресијата е делив со 7.

Решение на наградната задача Сигма 90

Даден е правилен $2n$-аголник со центар S. Нека M е множеството од сите четириаголници со темиња во дадениот $2n$-аголник. Пресметај го $u-v$, каде u е бројот на четириаголници од M кои ја содржат точката S во својата внатрешност, а v е бројот на четириаголници од M кои ја содржат точката S во својата внатрешност.

Решение. Бројот на сите четириаголници со темиња во темињата на дадениот четириаголник е:

$$|M|=\binom{2n}{4}.$$

Значи, $u+v=\binom{2n}{4}$ и според тоа

$$u-v=\binom{2n}{4}-2v.$$

Од друга страна

$$v=2n\left[\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{2}+\ldots+\binom{2}{2}\right] \text{ т.е.}$$

$$v=n[(n-1)(n-2)+(n-2)(n-3)+\ldots+3\cdot 2+2\cdot 1]=n\sum_{k=1}^{n-2}k(k+1)=n\left(\sum_{k=1}^{n-2}k^2+\sum_{k=1}^{n-2}k\right).$$

Но, $\sum_{k=1}^{n-2}k^2=\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n-2}k=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$,

и не е тешко да се види дека

$$v=2n\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=2n\binom{n}{3}.$$

Конечно,

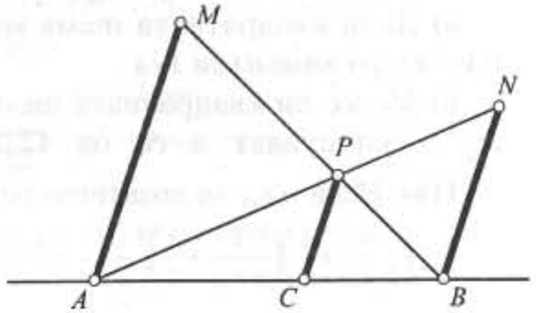
$$u-v=\binom{2n}{4}-4n\binom{n}{3}.$$

Рубрика задачи СИГМА 91

1171. На страната AB од остроаголниот триаголник ABC е избрана точка K. Точката M е средина на BC, а AM и CK се сечат во точката F, при што $\overline{CF}=\overline{AK}$. Докажи дека $\overline{CF}=\overline{AB}$.

1172. На фигурата на цртежот, сечките AM, BN и CP се паралелни. Докажи дека

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}=\frac{1}{CP}.$$



1173. Дадени се две точки X и Y од една рамнина. Да се најдат сите точки Z од таа рамнина, така што XYZ е рамнокрак триаголник.

1174. Нека C е внатрешна точка од отсечката AB, а ACD и CBE се рамнострани триаголници кои се на иста страна од AB во една рамнина. Која е геометриската фигура што е формирана од средините на отсечките DE.

1175. Реши ја равенката

$$\frac{1}{x^2+2x+2}+\frac{3}{x^2+2x+4}+\frac{5}{x^2+2x+6}+\ldots+\frac{2011}{x^2+2x+2012}=1006.$$

1176. Нека n, $n>6$ е природен број за кој $n-1$ и $n+1$ се прости броеви. Докажи дека $n^2(n^2+16)$ е делив со 720. Дали обратното е точно?

1177. Докажи дека за секој природен број k следните тврдења се еквивалентни.

а) Постојат ненегативни цели броеви a и b такви што $k=a^2+b^2+ab$.

б) Постојат ненегативни цели броеви c и d такви што $k=c^2+d^2-cd$.

1178. Двоцифрените броеви од 10 до 99 се запишани во некој редослед

$$\overline{a_1b_1},\overline{a_2b_2},\overline{a_3b_3},\ldots,\overline{a_{99}b_{99}}.$$

Да се најде бројот $\overline{a_1b_1a_2b_2}$ ако

$$\overline{a_1b_1a_2b_2}=\overline{a_3b_3}+\overline{a_4b_4}+\ldots+\overline{a_{99}b_{99}}.$$

1179. Две кружници k_1 и k_2 со центри O_1 и O_2 соодветно се допираат во точката C, а AB е нивна заедничка тангента ($A\in k_1$, $B\in k_2$). Определи ги должините на радиусите r_1 и r_2 на k_1 и k_2 соодветно, ако $\overline{AC}=a$ и $\overline{BC}=b$.

1180. Да се реши равенката

$$1+\sin\frac{x+\pi}{5}\sin\frac{x-\pi}{11}=0.$$

1181. Нека a_n е последната цифра на бројот n^n. Дали

$$0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$$

е рационален број.

1182. Дали постојат шест различни точки во рамнината(една црвена, пет плави и три зелени), такви што збирот на растојанијата помеѓу црвената и плавите точки е 8, збирот на растојанијата меѓу црвената и зелените точки е 6, а збирот на растојанијата меѓу плавите и зелените точки е 9.

1183. Дадена е квадратна шема со димензии 10×10.

а) Дали квадратната шема може да се препокрие со со правоаголни плочки со димензии 1×4.

б) Може ли квадратната шема да се препокрие со 25 плочки кои се се преклопуваат а се од облик

1184. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right)\geq 1.$$

1185. Низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_{k+1}=\frac{x_k}{x_1^2+x_2^2+...+x_k^2}$, за $k\geq$

Докажи дека $\sqrt{x_k^2+4\frac{x_{k-1}}{x_{k+1}}}$ е рационален број.

МАТУРА јуни, Основно ниво

1. Степенот на полиномот $(2-x^2)(x^2+2)(x-2)^3$ е:

А. 2 Б. 3 В. 7 Г. 15

2. Вредноста на бројниот израз $3+3:3-64\cdot8:2$ е:

А. -14 Б. -12 В. 0 Г. -2

3. Количникот од најмалиот заеднички содржател (НЗС) и најголемиот заеднички делител (НЗД) на броевите 30 и 42 изнесува:

А. $\frac{7}{5}$ Б. 35 В. $\frac{5}{7}$ Г. 6

4. Решение на системот равенки $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\end{cases}$ е подредениот пар реални броеви:

А. (2, 3) Б. (3, 3) В. (2, 2) Г. (3, 2)

5. Решение на системот неравенки $\begin{cases}-3x-12\leq0\\ 0<7-x\end{cases}$ е интервалот:

А. (-4, 7] Б. (-4, 7) В. [-4, 7) Г. [-4, 7]

6. Производот на решенијата на квадратната равенка $3x^2+15x-18=0$ е:

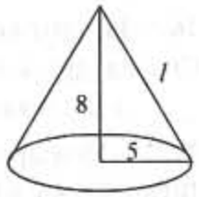
А. -18 Б. 15 В. -6 Г. 6

7. Пресечната точка на графикот на линеарната функција $y=\frac{7}{3}x-7$ со x - оската е:

А. (-7, 0) Б. (7, 0) В. (3, 0) Г. (-3, 0)

8. Во кружница со радиус $12\,cm$ една тетива е оддалечена $4\,cm$ од центарот. Колку изнесува должината на тетивата?

А. $16\sqrt{2}\,cm$ Б. $8\sqrt{2}\,cm$ В. $8\sqrt{10}\,cm$ Г. $4\sqrt{10}\,cm$



9. Колку мерни единици изнесува плоштината на обвивката на правиот конус преставен на цртежот?

А. 40π Б. 80π В. $5\pi\sqrt{39}$ Г. $5\pi\sqrt{89}$

10. Ако големиот круг на една топка има плоштина $1\,m^2$, тогаш плоштината на топката е:

А. $2\,m^2$ Б. $3\,m^2$ В. $4\,m^2$ Г. $5\,m^2$

11. Квадрат со дијагонала $d=20\,cm$ има плоштина:

А. $200\,cm^2$ Б. $400\,cm^2$ В. $200\sqrt{2}\,cm^2$ Г. $400\sqrt{2}\,cm^2$

12. Ако плоштината на една коцка е $6\,cm^2$, тогаш нејзиниот волумен е:

А. $216\,cm^3$ Б. $6\,cm^3$ В. $36\,cm^3$ Г. $1\,cm^3$

13. Ако должината на две страни на еден рамнокрак триаголник се $9\,cm$ и $19\,cm$ тогаш должината на третата страна е:

А. $9\,cm$ Б. $18\,cm$ В. $19\,cm$ Г. $20\,cm$

14. За која вредност на параметарот a правата $(a-3)x+(a+2)y+2a-4=0$ минува низ координатниот почеток?

А. $a=-2$ Б. $a=2$ В. $a=3$ Г. $a=4$

15. Колку е мерниот број на должината на радиусот на кружницата која минува низ точката $M(-4,-2)$, а центарот и е во точката $O(-8,-10)$?

А. $\sqrt{48}$ Б. $\sqrt{80}$ В. $\sqrt{108}$ Г. $\sqrt{288}$

16. Правите коишто се нормални на правата со равенка $2y+6x=24$ имаат коефициент на правец:

А. 3 Б. 6 В. $\frac{1}{3}$ Г. $-\frac{1}{6}$

17. Во едно училиште тројца од пет ученици се занимаваат со спорт. Веројатноста дека еден случајно избран ученик нема да се занимава со спорт е:

А. 0,85 Б. 0,40 В. 0,60 Г. 0,20

18. Истовремено се фрлаат три различно обоени коцки за играње. Бројот на елементарните настани „Збирот од бројот на појавени точки на горните страни од сите три коцки е 6" е:

А. 6 Б. 8 В. 10 Г. 9

19. Збирот на природните броеви од 1 до 100 изнесува:

А. 3030 Б. 3050 В. 4950 Г. 2050

20. Ако $a_1=m$ и $a_{100}=n$ се членови на една геометриска прогресија, тогаш $a_{49}\cdot a_{52}$ е:

А. $m\cdot n$ Б. $\frac{m\cdot n}{2}$ В. $\frac{m\cdot n}{4}$ Г. m^2n^2

21. Ако $a^{16}=4$, тогаш вредноста на изразот $(a^{-8})^8:(a^4)^{-4}$ изнесува: _____.

22. Равенката на правата што минува низ точките $A(-4,0)$ и $B(0,3)$ запишана во отсечен вид е _____.

23. Ако α е аголот што го зафаќаат правите $y=4x+7$ и $3y+x-6=0$ тогаш $tg\alpha=$ __.

24. Дадена е квадратната равенка $x^2-(m-2)x-2m+1=0$.

А. Равенката има решение $x=0$ за $m=$ _____.

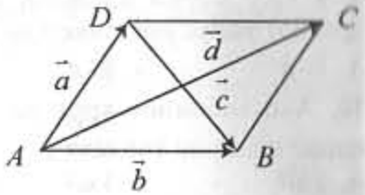
Б. Решенијата на равенката се заемно спротивни реални броеви ако $m=$ _____.

25. Ако за два реални броеви a и b важат релациите $a+b=5$; $a\cdot b=7$ тогаш:

А. $a^2+b^2=$ _____

Б. $a^3+b^3=$ _____

26. На цртежот е зададен паралелограмот $ABCD$. Според цртежот, збирот $\vec{a}+\vec{b}$ е еднаков на векторот ____, а разликата $\vec{a}-\vec{b}$ е еднаква на векторот _____.



27. А. Центарот на опишаната кружница околу еден триаголник е во пресекот на_____.

Б. Ортоцентарот на еден триаголник е во пресекот на _____.

28. Ако збирот на аглите при едната основа на правоаголен трапез е 128°, тогаш аглите при кракот што не е нормален на основите на трапезот изнесуваат _____° и _____°.

29. Во една кутија има 10 црвени и 10 бели топчиња нумерирани со броевите од 1 до 10 од кои треба да се избере едно топче.

А. Веројатноста случајно избраното топче да биде бело и означено со број помал од 5 е

Б. Веројатноста случајно избраното топче да биде црвено или означено со број поголем од 7 е _____.

30. А. Ако првите два члена на една геометриска прогресија се 2 и -4, тогаш десеттиот член е _____.

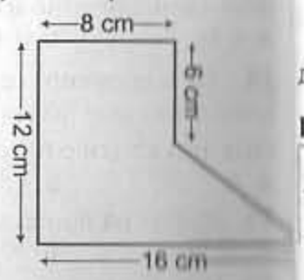
Б. Ако -2, m, 10 се три последователни членови на една аритметичка прогресија, тогаш $m=$ _____.

31. Реши ја неравенката $\frac{5x-1}{3-x}\geq 0$.

32. На писмен испит ученикот треба да одговори на 20 прашања. За секој точен одговор ученикот добива 4 поени, а за секој неточен одговор ученикот губи 2 поени. Ана освоила 38 поени. На колку прашања Ана одговорила точно?

33. Збирот од квадратите на три последователни непарни природни броеви е 251. Состави равенка според условот.
Реши ја добиената равенка и напиши ги бараните броеви.

34. Пресметај ја плоштината на фигурата преставена на цртежот.



35. Околу квадрат со страна $2dm$ е опишана кружница. Направи скица и определи го односот на плоштината на квадратот и кружницата.

36. Плоштината на правилна четириаголна пирамида е $96cm^2$, а апотемата е $5cm$. Направи скица и пресметај го волуменот на пирамидата.

37. Нека е дадена правата $(2+k)x-(1-2k)y+3=0$. Определи го параметарот k така што дадената права да отсекува еднакви сегменти (отсечоци) на координатните оски.

38. Определи ја равенката на права што минува низ пресекот на правите $2x+7y-8=0$ и $3x+2y+5=0$ и е паралелна со правата $2x+3y-8=0$.

39. Од 20 карти нумерирани со броевите од 2 до 21 треба случајно да се избере една. Колкава е веројатноста избраната карта да биде нумерирана со прост или непарен број? Опиши ги и означи ги настаните и нивните веројатности што ќе ги користиш при решавањето.

40. Дадена е конечната низа од трицифрени броеви деливи со 7. Определи ги:
- првите три и последните три членови на низата;
- бројот на членовите на низата;
- збирот на сите членови на низата.

НАСТАВНИ ТЕСТОВИ

I година

Тема: **Геометриски фигури во рамнината. Пропорционалност на величините**

Подготвила: **Калина Грковска**, ДСУ Гимназија „Мирче Ацев" – Прилеп

Забелешка: Од задачите што се под а) и б) одбери една опција или а) или б)

1. Дадени се векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Конструирај го векторот

а) (10б) $\vec{x}=\vec{a}+3\vec{b}-2(\vec{a}-\vec{b})$ **б) (20б)** $\vec{x}=\frac{3}{2}(2\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

2. Да се изрази векторот $\vec{x}$ преку векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ако:

а) (7б) $2(\vec{a}+3\vec{x})=4\vec{x}+3\vec{a}$

б) (14б) $\frac{2}{3}(\vec{x}-2\vec{a})-\frac{1}{3}\vec{a}-2\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})$

3. (12б) Пресметај ги вредностите на x, y, z ако $x:y:z=2:5:6$ и $2x+3y-2z=14$.

4. (18б) Бригада од 10 трактори може да го изора полето за 18 дена. За колку дена ќе биде изорано полето ако се работи со 15 трактори.

5. (18б) Во една фирма со 150 вработени, 50% од вработените се со факултет, 30% се со средно училиште и 20% се магистри. Одреди го бројот на вработени со факултет, со средно училиште и бројот на магистри во фирмата.

6. (18б) Вложени се 80000 денари со каматна стапка од 3%. Колку камата ќе донесат за 6 месеци и 6 дена.

Предлог критериум за оценување:

бодови	0-32	33-50	51-68	69-85	86-100
оценка	1	2	3	4	5

Тема: **Степени и корени**

Подготвила: **Калина Грковска**, ДСУ Гимназија „Мирче Ацев" – Прилеп

Забелешка: Од задачите што се под а) и б) одбери една опција или а) или б)

1. Да се запише како степен со основа x изразот

а) (7б) $\left(\frac{x^8\cdot x^{-2}}{x^3}\right)^2$ **б) (14б)** $\left(\frac{x^6\cdot x^5}{x^{-3}\cdot x^0}\cdot\frac{x^2}{x^8\cdot x^{-4}}\right)^{-3}$

2. Изврши ги назначените операции и доведи го во нормален вид коренот:

а) (13б) $\frac{\sqrt[3]{5x}\cdot\sqrt{5x}}{\sqrt[6]{5x}}$ **б) (20б)** $\sqrt[5]{xy^3}\cdot\sqrt[4]{x^3y^2}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{4xy^2}}$

3. Пресметај:

а) (9б) $9^0+\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ б) (16б) $32^{-\frac{3}{5}}-\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{5}{6}}$

4. Изврши ги назначените операции:

а) (13б) $(x^2\sqrt{y}-y\sqrt{x})\cdot(x^2\sqrt{y}+y\sqrt{x})$

б) (25б) $2\sqrt{x}-3y\sqrt{\frac{x}{y^2}}-\frac{8}{x^2}\sqrt{\frac{x^5}{4}}-6x\sqrt{\frac{4}{x}}+\frac{12x}{y^2}\sqrt{\frac{y^4}{x}}$

5. Упрости го изразот:

а) (13б) $\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ б) (25б) $\frac{a}{a-\sqrt{ab}}+\frac{b}{\sqrt{ab}+b}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

Предлог критериум за оценување:

бодови	0-32	33-50	51-68	69-85	86-100
оценка	1	2	3	4	5

II година

Тема: **Конструкција на триаголник и четириаголник**

Подготвила: **Оливера Танеска,** Велес

I *Група*

Реши ги задачите:

1. Да се конструира правоаголен триаголник ABC ако се дадени: $a-b, c$.

(6б)

2. Да се конструира паралелограм $ABCD$ ако се дадени:
$\measuredangle BAD=\alpha,\ \overline{AC}=d_1,\ \overline{BC}=d_2$.

(8б)

3. Да се конструира рамностран триаголник ако е дадена висината.

(10б)

4. Да се конструира делтоид $ABCD$ ако се дадени $\overline{AB}+\overline{AD}=m$, дијагоналата $\overline{BD}$ (оска на симетрија на делтоидот) $\measuredangle BAD=\alpha$.

(12б)

II *Група*

1. Да се конструира триаголник ABC ако се дадени: c, h_a, α.

(6б)

2. Да се конструира рамнокрак триаголник ABC ако се дадени: b, h_b.

(8б)

3. Да се конструира ромб $ABCD$ ако е дадена висината и една дијагонала.

(10б)

4. Да се конструира трапез $ABCD$ ако се дадени двете основи , кракот $AD=d$ и аголот β.

(12б)

Предлог критериум за оценување

бодови	0-11	12-17	18-24	25-30	31-36
оценка	1	2	3	4	5

III година

Тема: **Елементи на комбинаторика**

Подготвил: **Зоран Трифунов**, СОУ„Гимназија Кочо Рацин"-Велес

Само еден од понудените одговори е точен, заокружи го точниот одговор.

1. Колку е $C_{11}^8=?$

а) 165 б) 990 в) 11! г) друга вредност (4)

2. $\overline{V}_a^b=$

а) $\frac{a!}{(a-b)!}$ б) $\frac{a!}{b!}$ в) a^b г) друга вредност (4)

Допиши за да биде точно тврдењето.

3. Пресметај е $\overline{V}_5^3=$_____ (5)

4. $P_a=$_____ (5)

Реши ги задачите.

5. Бројот на варијации без повторување од 11 елементи класа 3 е: (10)

6. Да се запишат сите пермутации без повторување од елементите на множеството $\{2,4,6,8\}$. Колку е нивниот број? (10)

7. На една кружница има десет различни точки.
Колку тетиви и колку триаголници определуваат точките? (12)

8. Реши ја равенката $P_x:P_{x-2}=90$ (15)

9. Во клас има 12 машки и 18 девојки. (Во автобусот со кој ќе патувале на екскурзија имало место за сите ученици). На колку начини може да се избере група од пет ученика кои ќе биде префрлени во друг автобус, ако во секоја група има по две девојки? (15)

10. Докажи дека за секој природен број n, бројот $31\,|\,5^{n+2}+6^{2n+1}$ (20)

Предлог критериум за оценување

бодови	0-35	36-52	53-68	69-84	85-100
оценка	1	2	3	4	5

IV година

Тема: **Диференцијално сметање**

Изготвил : **Мариче Лазаровска**, СОУ "Гимназија Кочо Рацин" – Велес

(Во секоја задача можеш да избереш да решаваш една од понудените задачи или под а) или под б), само една се бодува)

1. Определи го првиот извод на функцијата користејки ги основните правила за диференцирање:

а) $y=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x^2-x$ **(5 б)** **б)** $y=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$ **(10 б)**

2. Определи го изводот на функцијата користејки ги основните правила за диференцирање:

а) $y=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x-\frac{x^3}{9}$ **(10 б)** **б)** $y=\frac{x\cdot e^x}{\sin x}$ **(14 б)**

3. Определи го првиот извод на сложената функција:

а) $y=\ln(7x^2+4)$ **(12 б)** **б)** $y=\ln(x+\sqrt{2+x^2})$ **(16 б)**

4. Определи ги интервалите на растење и опаѓање и екстремите на функцијата:

а) $y=\frac{x^3}{3}+2x^2$ **(14 б)** **б)** $y=\frac{3x}{x^2+x+1}$ **(20 б)**

5. **а)** Напиши ја равенката на тангента и нормала на кривата $y=\frac{8}{4+x^2}$ во точката со апциса $x_0=2$. **(14 б)**

б) Во кои точка на кривата $y=x^3-2x^2$ треба да се повлече тангентата за таа да биде паралелна со правата $4x-y+14=0$. Запиши ја равенката на тангента. **(20 б)**

6. **а)** Со ограда долга 200 m треба да се огради нива фо форма на правоаголник. Како треба да се изберат димензиите на нивата за таа да има максимална плоштина? **(15 б)**

б) Определи ги димензиите на отворен базен со квадратно дно што собира $32m^3$ вода, така што за ѕидовите и дното на базенот да се потроши најмалку материјал за обложување. **(20 б)**

Предлог критериум за оценување:

бодови	0-32	33-50	51-68	69-85	86-100
оценка	1	2	3	4	5

Конкурсни задачи за математички натпревари

I година

109. Квадратна шема со димензии 3×3 е пополнета како на цртежот.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Квадратната шема може да се трансформира во нова, на тој начин што две соседни полиња(што имаат заедничка страна) се намалуваат за вредноста на помалиот од двата броја што се запишани во нив. Дали по конечно многу вакви трансформации може да се добие шема пополнета со нули.

Решение. Со една ваква трансформација збирот на броевите од квадратната шема се намалува за парен број $2x$. Значи, неговата парност не се менува. Бидејќи збирот на почетокот е 45, т.е. непарен број, по конечно многу трансформации пак ќе биде непарен.

Значи, не може да се добие квадратна шема во која сите броеви се нули.

110. На еден шаховски турнир учествувале само мајстори и велемајстори. Секои два учесници меѓусебно одиграле по точно една партија Ако секој учесник на турнирот точно половина од своите поени ги освоил во партиите со мајсторите, докажи дека бројот на учесници на турнирот е полн квадрат.

Решение. Нека бројот на велемајстори е v а бројот на мајстори е m. Нека велемајсторите во игра со мајсторите освоиле a поени а мајсторите во игра против против велемајсторите освоиле b поени.

Мајсторите и велемајсторите меѓусебно одиграле mv партии и во тие партии се освоиле и толку поени. Тогаш

$$a+b=mv.$$

Но бројот на поени кои ги освоиле велемајсторите во игри против мајсторите е еднаков на бројот на поени кои велемајсторите ги освоиле меѓу себе. Според тоа

$$a=\frac{v(v-1)}{2}.$$

Бројот на поени кои мајсторите ги освоиле против велемајсторите е еднаков на бројот на поени кои тие го освоиле меѓу себе, т.е.

$$b=\frac{m(m-1)}{2}.$$

Значи,

$$\frac{v(v-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}=mv$$

$$m+v=(v-m)^2.$$

Значи, навистина бројот на учесниците е полн квадрат.

111. Ако $a \neq b$, $b \neq c$ и $c \neq a$, тогаш

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

не зависи од x. Докажи!

Решение. Имаме

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=$$

$$=\frac{(x-b)(x-c)(b-c)+(x-c)(x-a)(c-a)+(x-a)(x-b)(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=$$

$$=\frac{x^2(b-c+c-a+a-b)-x[(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)]+bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=$$

$$=\frac{bc(b-c)+ac(c-a)+ab[(a-c)+(c-b)]}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{(b-c)(bc-ab)+(a-c)(ab-ac)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{(b-c)[b(c-a)+a(a-c)]}{(a-b)(b-c)(a-c)}=$$

$$=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=1$$

II година

112. Нека c и d се различни цели броеви такви што $c^2+ac+b=0$ и $d^2+ad+b=0$. Докажи дека равенката

$$x^4+ax^3+(b-2)x^2+ax+1=0$$

има четири реални различни решенија.

Решение. Броевите a,b,c,d ги задоволуваат равенствата $c^2+ac+b=0$ и $d^2+ad+b=0$, па ако од првото равенство го одземеме второто равенство, добиваме

$$c^2-d^2+ac-ad=0$$

$$(c-d)(c+d+a)=0.$$

Заради тоа што $c-d\neq 0$, добиваме $c+d+a=0$, т.е. $a=-(c+d)$. Со замена во $c^2+ac+b=0$, добиваме

$$c^2-c(c+d)+b=0$$

$$b=cd.$$

Сега ако замениме во равенката добиваме

$$x^4-(c+d)x^3+(cd-2)x^2+(c+d)x+1=0,$$

која можеме да ја запишеме во облик

$$(x^2-cx-1)(x^2-dx-1)=0.$$

Решението на ова равенка е севкупност на решенијата на равенките

$$\left[\begin{array}{l} x^2-cx-1=0 \\ x^2-dx-1=0 \end{array}\right.$$

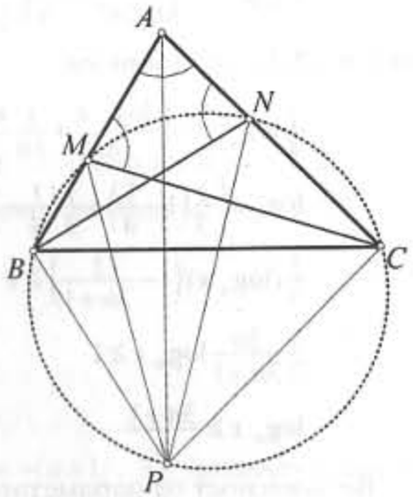
ивни решенија се $x_{1/2}=\frac{c\pm\sqrt{c^2+4}}{2}$ и $x_{3/4}=\frac{d\pm\sqrt{d^2+4}}{2}$, кои заради условот $\neq d$ се различни меѓу себе.

113. Нека a и b се взаемно прости броеви. Докажи дека равенката

$$ax+by=ab$$

ема решение во множеството природни броеви.

Решение. Нека (x,y) е решение на равенката во множеството природни роеви. Од равенството $a(b-x)=by$ добиваме $a\,|\,by$. Бидејќи $(a,b)=1$, добиваме $a\,|\,y$. Значи, постои $n\in\mathbb{N}$ таков што $y=na$. Слично, од равенството $b(a-y)=ax$ добиваме $b\,|\,ax$. Повторно, од $(a,b)=1$ добиваме $b\,|\,x$. Според тоа, постои $m\in\mathbb{N}$ таков што $x=bm$.



Но тогаш

$$abm+abn=ab$$

$$m+n=1.$$

Значи, m и n се природни броеви кои се решенија на равенката $u+v=1$ во множеството $\mathbb{N}$, што не е можно.

Заради добиената контрадикција, дадената равенка нема решенија во $\mathbb{N}$.

114. На страните AB и AC на триаголникот ABC се избрани точки M и N соодветно, различни од неговите темиња, при што $\overline{CM}=\overline{CA}$ и $\overline{BN}=\overline{BA}$. Точката P е симетрична на точката A во однос на правата BC. Докажи дека PA е симетрала на аголот MPN.

Решение. Бидејќи точката P е симетрична на точката A во однос на правата BC (види цртеж) имаме $\measuredangle BPC=\measuredangle BAC$. Од тоа што ΔMCA е рамнокрак со основа MA имаме $\measuredangle AMC=\measuredangle MAC=\measuredangle BAC$. Слично, од тоа што ΔABN е рамнокрак со основа NA имаме $\measuredangle ANB=\measuredangle BAN=\measuredangle BAC$.

Според тоа,

$$\measuredangle BPC+\measuredangle BMC=\measuredangle BPC+(180^\circ-\measuredangle AMC)=\measuredangle BPC+(180^\circ-\measuredangle BAC)=$$
$$=\measuredangle BPC+(180^\circ-\measuredangle BPC)=180^\circ$$

Значи, четириаголникот $PCMB$ е тетивен. Оттука

$$\measuredangle MPA=\measuredangle MPC-\measuredangle APC=\measuredangle MBC-\measuredangle PAC=\measuredangle ABC-(90^\circ-\measuredangle ACB)=$$
$$=\measuredangle ABC+\measuredangle ACB-90^\circ$$

$$\measuredangle NPA = \measuredangle NPB - \measuredangle APB = \measuredangle ACB - \measuredangle BAP = \measuredangle ACB - (90^\circ - \measuredangle ABC) =$$
$$= \measuredangle ACB + \measuredangle ABC - 90^\circ$$

Бидејќи $\measuredangle MPA = \measuredangle NPA$, добиваме дека PA е симетрала на $\measuredangle MPN$, што требаше и да се докаже.

III година

115. Определи ги решенијата на неравенката

$$\frac{1}{4}\log_a x + \frac{1}{7}\log_{a^4} x + \frac{1}{10}\log_{a^7} x + \ldots + \frac{1}{3n+1}\log_{a^{3n-2}} x \geq 1.$$

Решение. Заради равенството

$$\log_{a^k} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^k} = \frac{\log_a x}{k\log_a a} = \frac{\log_a x}{k},$$

за $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, добиваме

$$\frac{1}{4}\log_a x + \frac{1}{7}\frac{\log_a x}{4} + \frac{1}{10}\frac{\log_a x}{7} + \ldots + \frac{1}{3n+1}\frac{\log_a x}{3n-2} \geq 1$$

$$\log_a x\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right] \geq 1$$

$$\frac{1}{3}(\log_a x)\left(1-\frac{1}{3n+1}\right) \geq 1$$

$$\frac{1}{3}\frac{3n}{3n+1}\log_a x \geq 1$$

$$\log_a x \geq \frac{3n+1}{n}$$

Во зависност од параметарот a ги имаме следните два случаи.

Случај 1. $a > 1$

Бидејќи $\log_a x$ е монотоно растечка $x \geq a^{\frac{3n+1}{n}} = \sqrt[n]{a^{3n+1}}$. Значи, во овој случај решенија се

$$x \in [a^3\sqrt[n]{a}, +\infty)$$

Случај 2. $0 < a < 1$

Бидејќи $\log_a x$ е монотоно опаѓачка функција, имаме $0 < x \leq \sqrt[n]{a^{3n+1}}$. Значи, во овој случај решенија се

$$x \in (0, a^3\sqrt[n]{a}).$$

116. Докажи дека во секој нетапоаголен триаголник ABC е исполнето неравенството

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} > 2.$$

Решение. Доволно е да се докаже точноста на равенството

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

каде α, β, γ се агли во триаголник.

Бидејќи триаголникот не е тапоаголен, имаме $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогаш

$$0 < \sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma \leq 1$$

(можен е случај некој од аглите да е прав). Сега,

$$\sin\alpha \geq \sin^4\alpha$$
$$\sin\beta \geq \sin^4\beta$$
$$\sin\gamma \geq \sin^4\gamma$$

при што најмногу едно од неравенствата може да е равенство. Од последните неравенства добиваме

$$\sqrt{\sin\alpha} \geq \sqrt{\sin^4\alpha} = \sin^2\alpha$$
$$\sqrt{\sin\beta} \geq \sqrt{\sin^4\beta} = \sin^2\beta,$$
$$\sqrt{\sin\gamma} \geq \sqrt{\sin^4\gamma} = \sin^2\gamma$$

и ако ги собереме добиваме

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} > \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \geq 2,$$

Последното неравенство е точно, бидејќи од условот на задачата

$$0 \leq \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma < 1,$$

бидејќи агли во нетапоаголен триаголник.

117. Да се реши равенката

$$\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+a+1} + \sqrt[3]{x+a+2} = 0.$$

Решение. Очигледно е дека едно решение е $x = -(a+1)$. Ќе покажеме дека тоа е и единствено решение. Бидејќи кореновите показатели на собироците се непарни броеви воведуваме смена $y = x + a + 1$. Со воведената смена добиваме

$$\sqrt[3]{y-1} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y+1} = 0,$$

која можеме да ја запишеме во облик

$$-\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{y-1} + \sqrt[3]{y+1}.$$

Ако последната равенка ја кубираме, добиваме

$$-y = y - 1 + 3\sqrt[3]{(y^2-1)(y+1)} + 3\sqrt[3]{(y^2-1)(y-1)} + y + 1$$

$$-3y = 3\sqrt[3]{y^2-1}\underbrace{(\sqrt[3]{y+1} + \sqrt[3]{y-1})}_{-\sqrt[3]{y}}$$

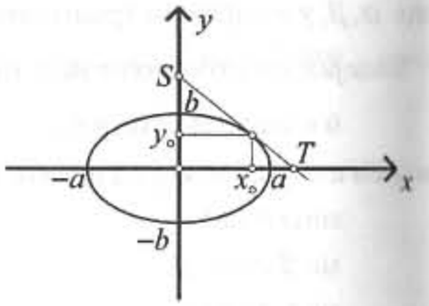
$$-y = -\sqrt[3]{y^3 - y}.$$

Јасно е дека последната равенка има единствено решение $y = 0$, па според тоа единствено решение на почетната равенка е

$$x = -(a+1).$$

IV година

118. Докажи дека, растојанието меѓу пресечните точки на тангентата со координатните оски, повлечена во произволна нејзина точка што не е пресечна со координатните оски, не е помало од збирот на нејзините полуоски.



Решение. За елипсата $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, равенката на тангентата во нејзината точка $M(x_\circ,y_\circ)$ е

$$\frac{x_\circ x}{a^2}+\frac{y_\circ y}{b^2}=1.$$

Пресечни точки на тангентата со координатните оски се $T\left(\frac{a^2}{x_\circ},0\right)$ и $S\left(0,\frac{b^2}{y_\circ}\right)$. Растојанието меѓу нив е еднакво на

$$d=\sqrt{\left(\frac{a^2}{x_\circ}-0\right)^2+\left(0-\frac{b^2}{y_\circ}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^4}{x_\circ^2}+\frac{b^4}{y_\circ^2}}.$$

Бидејќи $\frac{x_\circ^2}{a^2}+\frac{y_\circ^2}{b^2}=1$, имаме

$$d^2=d^2\cdot 1=\left(\frac{a^4}{x_\circ^2}+\frac{b^4}{y_\circ^2}\right)\left(\frac{x_\circ^2}{a^2}+\frac{y_\circ^2}{b^2}\right)=a^2+b^2+ab\left(\frac{a^3y_\circ^2}{b^3x_\circ^2}+\frac{b^3x_\circ^2}{a^3y_\circ^2}\right).$$

Но, $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\ge 2$ за $u,v>0$, па затоа $\frac{a^3y_\circ^2}{b^3x_\circ^2}+\frac{b^3x_\circ^2}{a^3y_\circ^2}\ge 2$. Според тоа,

$$d^2\ge a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$$

односно

$$d\ge a+b.$$

119. Определи ги решенијата на равенката

$$8^x+27^x+64^x+125^x=24^x+30^x+40^x+60^x.$$

Решение. Ако воведеме смени $a=2^x$, $b=3^x$, $c=4^x$ и $d=5^x$, равенката го добива обликот

$$a^3+b^3+c^3+d^3=abc+abd+acd+bcd,$$

каде $a,b,c,d>0$.

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$\begin{cases}a^3+b^3+c^3\ge 3abc\\ a^3+b^3+d^3\ge 3abd\\ a^3+c^3+d^3\ge 3acd\\ b^3+c^3+d^3\ge 3bcd\end{cases}\qquad(1)$$

Ако овие неравенства ги собереме, добиваме

$$3a^3+3b^3+3c^3+3d^3\ge 3abc+3abd+3acd+3bcd$$

$$a^3+b^3+c^3+d^3\ge abc+abd+acd+bcd\qquad(2)$$

Во (2) равенство важи ако и само ако неравенствата во (1) се равенства. Во (1) неравенствата се равенства, ако и само ако

$$a=b=c=d.$$

Од $a=c$, добиваме $2^x=4^x$. Единствено рашение на последната равенка е $x=0$. Не е тешко да се провери дека тоа е решение и на почетната равенка.

120. Определи ги корените на равенката $x^5-55x+21=0$, ако се знае дека $x_1x_2=1$.

Решение. Бидејќи x_1 и x_2 се нули на полиномот $x^5-55x+21$, тој е делив со полиномот

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+px+1,$$

каде $-p=x_1+x_2$.

Заради тоа,

$$x^5-55x+21=(x^2+px+1)(x^3+ax^2+bx+c)=$$
$$=x^5+(p+a)x^4+(pa+b+1)x^3+(a+pb+c)x^2+(b+pc)x+c.$$

Според теоремите за еднаквост на полиноми, имаме

$$\begin{cases}p+a=0\\ pa+b+1=0\\ a+pb+c=0\\ b+pc=-55\\ c=21\end{cases}$$

По средување на овие равенки, добиваме

$$p^3-2p+21=0$$

$$p^2+21p+54=0.$$

Заедничко решение на овие две равенки е $p=-3$. Така, сега имаме

$$x_1x_2=1 \qquad \text{и} \qquad x_1+x_2=3,$$

а x_1,x_2 се решенија на равенката

$$x^2-3x+1=0.$$

Решенија на ова равенка се $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, па значи,

$$(x_1,x_2)\in\left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$$

Подготвителни задачи за математички натпревари

Тема: **Теорија на броеви-конгруенции**

Подготвил: **Алекса Малчески**, Машински факултет-Скопје

1. Нека a,b,c,d се природни броеви такви што $a+b+1=c+d+1=p$, каде p е прост број и $a\not\equiv c(\mathrm{mod}\,2)$. Докажи дека $p\,|\,a!b!+c!d!$.

Решение. Од условите на задачата

$$p-(a+1)\equiv-(a+1)\ (\mathrm{mod}\,p) \qquad p-(c+1)\equiv-(c+1)\ (\mathrm{mod}\,p)$$
$$p-(a+2)\equiv-(a+2)\ (\mathrm{mod}\,p) \qquad p-(c+2)\equiv-(c+2)\ (\mathrm{mod}\,p)$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$p-(p-1)\equiv-(p-1)\ (\mathrm{mod}\,p) \qquad p-(p-1)\equiv-(p-1)\ (\mathrm{mod}\,p).$$

Сега јасно е дека

$$(p-a-1)!\equiv(-1)^{p-a-1}(a+1)(a+2)....(p-1)\ (\mathrm{mod}\ p)$$
$$(p-c-1)!\equiv(-1)^{p-c-1}(c+1)(c+2)....(p-1)\ (\mathrm{mod}\ p).$$

и

$$a!(p-a-1)!\equiv(-1)^{p-a-1}(p-1)!\ (\mathrm{mod}\ p)$$
$$c!(p-c-1)!\equiv(-1)^{p-c-1}(p-1)!\ (\mathrm{mod}\ p).$$

Оттука

$$a!(p-a-1)!+c!(p-c-1)!\equiv(-1)^{p-a-1}(p-1)![(-1)^{a-c}+1](\mathrm{mod}\ p).$$

Бидејќи $a\not\equiv c(\mathrm{mod}\,2)$ добиваме дека $a-c$ не е парен број. Според тоа

$$(-1)^{p-a-1}(p-1)![(-1)^{a-c}+1]\equiv(-1)^{p-a-1}(p-1)![-1+1]\equiv0\ \ (\mathrm{mod}\ p),$$

од каде следува $a!(p-a-1)!+c!(p-c-1)!\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$. Но,

$$a!(p-a-1)!+c!(p-c-1)!=a!b!+c!d!\ ,$$

па затоа

$$a!b!+c!d!\equiv0(\mathrm{mod}\ p),$$

односно $p\,|\,a!b!+c!d!$.

2. Нека p е непарен прост број. Докажи дека

а) $1^2\cdot3^2\cdot\ldots\cdot(p-2)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\ (\mathrm{mod}\,p)$

б) $2^2\cdot4^2\cdot\ldots\cdot(p-1)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\ (\mathrm{mod}\,p)$.

Решение. Според теоремата на Вилсон

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(p-1)\equiv-1\ (\mathrm{mod}\ p).$$

Но за секој $i=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ е исполнето

$$i\equiv-(p-i)\ (\mathrm{mod}\ p).$$

а) Ако избереме $i=2,4,6,8,...,p-1$ добиваме

$$2\equiv-(p-2)\ (\mathrm{mod}\ p) \qquad 2\equiv-(p-2)\ (\mathrm{mod}\ p)$$
$$4\equiv-(p-4)\ (\mathrm{mod}\ p) \qquad 4\equiv-(p-4)\ (\mathrm{mod}\ p)$$
$$\vdots \qquad \text{т.е.} \qquad \vdots$$
$$p-1\equiv-(p-(p-1))\ (\mathrm{mod}\ p) \qquad p-1\equiv-1\ (\mathrm{mod}\ p).$$

Сега

$$2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot(p-1)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(p-2)\ (\mathrm{mod}\ p)$$
$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}[1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(p-2)][1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(p-2)]\equiv1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(p-1)\equiv-1\ (\mathrm{mod}\ p)$$

Значи,

$$(-1)^{\frac{p+1}{2}}1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot\ldots\cdot(p-2)^2\equiv(-1)^2\equiv1\ (\mathrm{mod}\ p)$$

б) Ако пак избереме $i=1,3,5,7,...,p-2$ добиваме

$$1\equiv-(p-1)\ (\mathrm{mod}\ p) \qquad 1\equiv-(p-1)\ (\mathrm{mod}\ p)$$
$$3\equiv-(p-3)\ (\mathrm{mod}\ p) \qquad 5\equiv-(p-5)\ (\mathrm{mod}\ p)$$
$$\vdots \qquad \text{т.е.} \qquad \vdots$$
$$p-2\equiv-(p-(p-2))\ (\mathrm{mod}\ p) \qquad p-2\equiv-2\ (\mathrm{mod}\ p).$$

Сега, од особините на конгруенции имаме

$$1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(p-2)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot(p-1)\ (\mathrm{mod}\ p)$$
$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}[2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot(p-1)][2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot(p-1)]\equiv1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(p-1)\equiv-1\ (\mathrm{mod}\ p)$$

Значи,

$$(-1)^{\frac{p+1}{2}}2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2\cdot\ldots\cdot(p-1)^2\equiv(-1)^2\equiv1\ (\mathrm{mod}\ p)$$

3. Нека p и q се различни прости броеви. Докажи дека

$$p^{q-1}+q^{p-1}\equiv1\ (\mathrm{mod}\ pq).$$

Решение. Бидејќи p и q се различни прости броеви, според малата теорема а Фермат имаме

$$p^{q-1}\equiv1\ (\mathrm{mod}\ p)$$
$$q^{p-1}\equiv1\ (\mathrm{mod}\ p)$$

дносно $q\,|\,p^{q-1}-1$ и $p\,|\,q^{p-1}-1$, а од теоремите за деливост $q\,|\,p^{q-1}+q^{p-1}-1$ и $p\,|\,q^{p-1}+p^{q-1}-1$. Бидејќи $(p,q)=1$ повторно според теоремите за деливост

$$pq\,|\,p^{q-1}+q^{p-1}-1.$$

Значи,

$$p^{q-1}+q^{p-1}\equiv1\ (\mathrm{mod}\ pq).$$

4. Нека p е непарен прост број и a е цел број кој не е делив со p. Докажи дека еден и само еден од броевите

$$A = a^{1+2+3+...+(p-1)} - 1$$

и

$$B = a^{1+2+3+...+(p-1)} + 1$$

е делив со p.

Решение. Ако $p \mid A$ и $p \mid B$, тогаш според теоремите за деливост $p \mid B - A = 2$. Значи, $p = 1$ или $p = 2$ што не е можно според претпоставките од задачата($p \geq 3$). Од друга страна

$$AB = (a^{1+2+3+...+(p-1)} - 1)(a^{1+2+3+...+(p-1)} + 1) = \left[a^{\frac{p(p-1)}{2}}\right]^2 - 1 = \left(a^{p-1}\right)^p - 1.$$

Според малата теорема на Фермат,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

и од теоремите за конгруенции имаме

$$\left(a^{p-1}\right)^p \equiv 1^p \equiv 1 \pmod{p}.$$

Значи, $p \mid AB$ а заради првиот дел од доказот имаме $p \mid A$ или $p \mid B$.

5. Нека a е цел број кој не е делив со простиот број p. Докажи дека

$$p \mid a^p + (p-1)!a.$$

Решение. Бидејќи $(a, p) = 1$ и p е прост број, според малата теорема на Фермат

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

т.е.

$$a^p \equiv a \pmod{p}. \qquad (1)$$

Од друга страна, според теоремата на Вилсон, имаме

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p},$$

а според особините на конгруенции

$$a(p-1)! \equiv -a \pmod{p}. \qquad (2)$$

Повторно, од особините на конгруенции, од (1) и (2) имаме

$$a^p + (p-1)!a \equiv a - a \pmod{p},$$

т.е.

$$a^p + (p-1)!a \equiv 0 \pmod{p}.$$ Значи, $p \mid a^p + (p-1)!a$.

6. Во квадратна таблица(шема) со димензии 10×10 запишани се броевите $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ на следниот начин

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Заокружни се десет броеви, во секоја редица и во секоја колона по еден број. Докажи дека меѓу нив има барем два еднакви.

Решение. Нека $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$ се избраните броеви. Со b_i и c_i ќе ги означиме броевите кои се први во редицата и колоната во која се наоѓа a_i, за $i = 1,2,3,...,10$. Бидејќи од секоја редица и колона е избран по еден број, тогаш

$$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

тогаш

$$(b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) + ... + (b_{10} + c_{10}) = (b_1 + b_2 + ... + b_{10}) + (c_1 + c_2 + ... + c_{10}) =$$
$$= 2(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 9) = 90 \equiv 0 \pmod{10}$$

Да забележиме дека $a_i \equiv b_i + c_i \pmod{10}$, $i = 1,2,3,...,10$. Според тоа

$$a_1 + a_2 + ... + a_{10} \equiv (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) + ... + (b_{10} + c_{10}) \equiv 0 \pmod{10}.$$

Ако броевите $a_1, a_2, ..., a_{10}$ се различни меѓу себе, тогаш

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \equiv 5 \pmod{10}.$$

Заради добиената контрадикција, постојат $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ такви што $a_i = a_j$.

7. Страните на една книга се означени со броевите 1 до 100 на вообичаен начин. Од книгата се откинати одреден број листови и збирот на броевите на откинатите страни е 4949. Колку листови се откинати од книгата?

Решение. Секој лист во книгата е означен со броевите $2n-1$ и $2n$ за некој $n \in \{1,2,3,....,50\}$. Нивниот збир е еднаков на $4n-1$. Со k ќе го означиме бројот на листови кои останале. Тогаш

$$(4n_1 - 1) + (4n_2 - 1) + ... + (4n_k - 1) = (1 + 2 + 3 + ... + 100) - 4949 = 101$$

$$4(n_1 + n_2 + ... + n_k) - k = 101.$$

Бидејќи $101 \equiv 3 \pmod 4$, добиваме дека $k \equiv 3 \pmod 4$. Значи k припаѓа на множеството $\{3,7,11,15,...,97\}$.

Ако $k=7$, тогаш

$$4(n_1+n_2+...+n_7)-7 \geq 4(1+2+3+4+5+6+7)-7=105>101.$$

Ако $k>7$, тогаш слично како и претходно

$$4(n_1+n_2+...+n_k)-k \geq 4(1+2+3+...+k)-k=4\frac{k(k+1)}{2}-k=$$

$$=2k^2+k>2\cdot 7^2+7=108+7=-115>101.$$

Значи $k<7$ од каде заради условот за k, добиваме $k=3$. Според тоа, останале 3 листови а се откинати 47 листови.

Секако дека таков случај е можен, на пример ако се истргнати првиот, вториот и 23-от лист. Тогаш

$$1+2+3+4+45+46=10+91=101.$$

Во општ случај

$$4(n_1+n_2+n_3)-3=101$$

$$n_1+n_2+n_3=27.$$

Последната равенка има повеќе решенија

$$\{(1,3,23),(1,5,21),...\}.$$

8. Определи ги сите прости броеви p такви што $5^{p^2} \equiv -1 \pmod{p^2}$.

Решение. Ако p е прост број таков што $5^{p^2} \equiv -1 \pmod{p^2}$, тогаш $5^{p^2} \equiv -1 \pmod p$, односно

$$5^{p^2}+1 \equiv 0 \pmod p. \qquad (1)$$

Од друга страна, според теоремата на Фермат

$$5^p \equiv 5 \pmod p$$

$$5^{p^2} \equiv 5^p \equiv 5 \pmod p$$

$$5^{p^2}+1 \equiv 6 \pmod p \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека $6 \equiv 0 \pmod p$. Единствени прости броеви за кои е точна последната конгруенција се $p=2$ и $p=3$.

а) За $p=2$ имаме

$$5^4+1=626 \not\equiv 0 \pmod 4.$$

б) За $p=3$ имаме

$$5^9+1=1953126=9\cdot 217014 \equiv 0 \pmod 9.$$

Значи, постои еден единствен прост број за кој е исполнет условот од задачата.

9. Нека n е природен број кој не е делив со 17. Докажи дека барем еден од броевите n^8-1 и n^8+1 е делив со 17.

Решение. Бидејќи $(n,17)=1$ и 17 е прост број, според теоремата на Фермат

$$n^{17-1} \equiv 1 \pmod{17},$$

$$n^{16} \equiv 1 \pmod{17}.$$

Значи, $17 \mid n^{16}-1$, т.е. $17 \mid (n^8-1)(n^8+1)$, и бидејќи 17 е прост број добиваме $17 \mid n^8-1$ или $17 \mid n^8+1$.

10. Збирот на природните броеви a,b и c е делив со 30. Докажи дека и збирот на петите степени е делив со 30.

Решение. Бидејќи 5 е прост број, за било кој цел број x според теоремата на Ферма е исполнето

$$x^5 \equiv x \pmod 5.$$

Слично, бидејќи 3 е прост број, од теоремата на Фермат и особините на конгруенции имаме

$$x^3 \equiv x \pmod 3,$$

$$x^5 \equiv x^3 \equiv x \pmod 3$$

За простиот број 2 имаме

$$x^2 \equiv x \pmod 3$$

$$x^4 \equiv x^2 \equiv x \pmod 2$$

$$x^5 \equiv x^2 \equiv x \pmod 2.$$

Сега бидејќи $2,3$ и 5 се различни прости броеви, за било кој цел број x е исполнето

$$x^5 \equiv x \pmod{2\cdot 3\cdot 5}.$$

Значи, $a^5 \equiv a \pmod{30}$, $b^5 \equiv b \pmod{30}$ и $c^5 \equiv c \pmod{30}$. Сега, од условот на задачата $a+b+c \equiv 0 \pmod{30}$ и од особините на конгруенции, имаме

$$a^5+b^5+c^5 \equiv a+b+c \equiv 0 \pmod{30},$$

што требаше да се докаже.

11. а) Одреди ги сите природни броеви n такви што 7 е делител на 2^n-1.

б) Докажи дека 7 не е делител на 2^n+1 за било кој природен број n.

Решение. а) Ќе разгледаме три случаи

1° $n=3k$. Тогаш

$$2^n-1=2^{3k}-1=(2^3)^k-1=8^k-1=(8-1)=7A,$$

каде $A=8^{k-1}+8^{k-2}+...+8^2+8+1$. Во овој случај $7\mid 2^n-1$.

2° $n=3k+1$. Од особините на конгуенции

$$2^3\equiv 1 \pmod 7$$

$$2^n-1=2^{3k+1}-1=2\cdot(2^3)^k-1\equiv 1 \pmod 7$$

$$2^n-1\equiv 1 \pmod 7$$

Во овој случај $7\nmid 2^n-1$.

3° $n=3k+2$. Слично

$$2^3\equiv 1 \pmod 7$$

$$2^n-1=2^{3k+2}-1\equiv 3 \pmod 7$$

Значи, $7\mid 2^n-1$ само за $n=3k$, $k\in\mathbb{N}$.

б) Од особините на конгруенции имаме

$$2^{3k}+1=8^k+1\equiv 2 \pmod 7$$
$$2^{3k+1}+1=2\cdot 8^k+1\equiv 3 \pmod 7$$
$$2^{3k+2}+1=4\cdot 8^k+1\equiv 5 \pmod 7$$

Секој природен број има еден од облиците $3k, 3k+1, 3k+2$ па според тоа $7\nmid 2^n+1$ за било кој $n\in\mathbb{N}$.

12. Определи го остатокот од делењето на бројот $3^{105}+4^{105}$ со бројот 11.

Решение. Јасно е дека

$$3^3\equiv 5 \pmod{11}, \qquad 3^2\equiv -2 \pmod{11},$$

па од особините на конгруенции $3^5\equiv -10 \pmod{11}$, т.е. $3^5\equiv 1 \pmod{11}$.

Слично,

$$4^3\equiv -2 \pmod{11}, \qquad 4^2\equiv 5 \pmod{11},$$

и исто од особините на конгруенции $4^5\equiv 1 \pmod{11}$.

Сега

$$3^{105}=(3^5)^{21}\equiv 1^{21}\equiv 1 \pmod{11}$$

$$4^{105}=(4^5)^{21}\equiv 1^{21}\equiv 1 \pmod{11},$$

и од особините на конгруенции

$$3^{105}+4^{105}\equiv 2 \pmod{11}.$$

13. Дали за секој парен природен број n, бројот $20^n+16^n-3^n-1$ е делив со 323.

Решение. Бројот 323 можеме да го запишеме во облик $323=17\cdot 19$ (17 и 19 : прости броеви).

Бидејќи n е непарен природен број, од особините на конгруенции имаме

$$20\equiv 3 \pmod{17}, \qquad 16\equiv -1 \pmod{17}$$

$$20^n\equiv 3^n \pmod{17}, \qquad 16^n\equiv 1 \pmod{17}.$$

)д последните две конгруенции добиваме

$$17\mid 20^n+16^n-3^n-1. \tag{1}$$

Слично, од тоа што n е непарен природен број, од особините на онгруенции имаме

$$20\equiv 1 \pmod{19}, \qquad 16\equiv -3 \pmod{19}$$

$$20^n\equiv 1 \pmod{19}, \qquad 16^n\equiv 3^n \pmod{19}.$$

Значи,

$$19\mid 20^n+16^n-3^n-1, \tag{2}$$

Бидејќи $(17,19)=1$, од (1) и (2) имаме

$$323=17\cdot 19\mid 20^n+16^n-3^n-1.$$

14. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$,

$$49\mid 2^{3n+3}-7n-8.$$

Решение. Да забележиме дека за секој природен број n е исполнето

$$[2^{3(n+1)+3}-7(n+1)-8]-[2^{3n+3}-7n-8]=7\cdot 2^{3n+3}-7=$$
$$=7\cdot(2^{3n+3}-1)=7[(2^3)^{n+1}-1]=7\cdot(2^3-1)\cdot A=49A. \tag{*}$$

аде $A=(2^3)^n+(2^3)^{n-1}+...+2^3+1$.

Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

Тврдењето е точно за $n=1$. Навистина

$$2^{3\cdot 1+3}-7-8=2^6-15=64-15=49,$$

.е. $49\mid 2^{3\cdot 1+3}-7-8$.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $n=k$, т.е.

$$49\mid 2^{3k+3}-7k-8.$$

Од равенството (*) имаме $49\mid[2^{3(k+1)+3}-7(k+1)-8]-[2^{3k+3}-7k-8]$, па од соремите за деливост

$$49\mid[2^{3(k+1)+3}-7(k+1)-8]-[2^{3k+3}-7k-8]+[2^{3k+3}-7k-8]=2^{3(k+1)+3}-7(k+1)-8.$$

Значи, тврдењето е точно и за $n=k+1$.

Сега, од принципот за математичка индукција имаме

$$49\mid 2^{3n+3}-7n-8$$

а секој $n\in\mathbb{N}$.

15. а) Нека p е прост број, а m и n ненегативни цели броеви такви што $m+n=p-1$. Докажи дека

$$m!n!\equiv(-1)^{m+1} \pmod p.$$

б) Нека p е непарен прост број. Докажи дека

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p.$$

Решение. а) Според теоремата на Вилсон и од условите на задачата, бидејќи p е прост број, имаме

$$(m+n)!=(p-1)!\equiv-1 \pmod p.$$

Да забележиме дека

$$(m+n)!=[(m+n)(m+n-1)...(m+n-(n-1))]m!.$$

Од особини на конгруенции имаме

$$-n\equiv m+n-(n-1) \pmod p$$

$$-n+1\equiv m+n-(n-2) \pmod p$$

$$-n+2\equiv m+n-(n-3) \pmod p$$

.....

$$-n+(n-1)\equiv m+n-(n-n) \pmod p$$

односно

$$(-1)^n n!\equiv(m+n)(m+n-1)...(m+n-(n-1)) \pmod p. \qquad (*)$$

Повторно, од особините на конгруенции и од (*), добиваме

$$(-1)^n n!m!\equiv[(m+n)(m+n-1)...(m+n-(n-1))]m!=(m+n)!=(p-1)!\equiv-1 \pmod p$$

$$(-1)^{n+m} n!m!\equiv(-1)^{m+1} \pmod p,$$

и бидејќи $m+n$ е парен број

$$m!n!\equiv(-1)^{m+1} \pmod p.$$

б) Нека p е непарен прост број. Тогаш

$$\frac{p-1}{2}+\frac{p-1}{2}=p-1.$$

Според доказот од делот а) за $m=\frac{p-1}{2}, n=\frac{p-1}{2}$, добиваме

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!\left(\frac{p-1}{2}\right)!\equiv(-1)^{m+1}\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$$

Односно

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p.$$

16. Нека p е прост број. Докажи дека за секој $a\in\mathbb{N}$

$$a^{(p-1)!+1}\equiv a \pmod p.$$

Решение. Ќе разгледаме два случаи.

а) $p\mid a$. Во овој случај

$$a^{(p-1)!+1}=a\cdot a^{(p-1)!}\equiv 0\equiv a \pmod p.$$

б) $p\nmid a$. Во овој случај, според малата теорема на Фермат, имаме

$$a^{p-1}\equiv 1 \pmod p.$$

Од особините на конгруенции

$$\left(a^{p-1}\right)^{(p-2)!}\equiv 1^{(p-2)!}=1 \pmod p$$

$$a^{(p-1)!+1}\equiv a \pmod p.$$

17. Природниот број $p>2$ е прост ако и само ако $(p-2)!\equiv 1 \pmod p$.

Решение. За секој природен број p имаме

$$(p-1)!+1=(p-1)(p-2)!+1=p(p-2)!-(p-2)!+1$$

$$(p-1)!+1-p(p-2)!=-(p-2)!+1.$$

Ако p е прост број поголем од 2, тогаш според теоремата на Вилсон и особините на конгруенции

$$(p-1)!+1\equiv 0 \pmod p, \qquad p(p-2)!\equiv 0 \pmod p.$$

Повторно од особините на конгруенции, имаме

$$(p-1)!+1-p(p-2)!\equiv 0 \pmod p.$$

Значи,

$$-(p-2)!+1=(p-1)!+1-p(p-2)!\equiv 0 \pmod p$$

$$(p-2)!\equiv 1 \pmod p.$$

Обратно, нека $(p-2)!\equiv 1 \pmod p$, т.е. $1-(p-2)!\equiv 0 \pmod p$. Но тогаш од $p(p-2)!\equiv 0 \pmod p$ и од особините на конгруенции

$$p(p-2)!+1-(p-2)!\equiv 0 \pmod p,$$

т.е. $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod p$. Сега, од теоремата на Вилсон добиваме дека p е прост број.

18. Докажи дека природниот број n е прост ако и само ако $n\mid N$, каде што $N=\sum_{k=1}^{n-3} k\cdot k!$.

Решение. За било кој природен број k е исполнето $k\cdot k!=(k+1)k!-k!$ па според тоа

$$N=\sum_{k=1}^{n-3} k\cdot k!=\sum_{k=1}^{n-3}[(k+1)!-k!]=(2!-1!)+(3!-2!)+\ldots+((n-2)!-(n-3)!)=(n-2)!-1!$$

Значи, $N=(n-2)!-1$, па според претходната задача n е прост број ако и само ако $(n-2)!\equiv 1 \pmod{n}$, т.е. $n \mid N=(n-2)!-1$.

19. Докажи дека за секој природен број n и секој прост број p, бројот

$$1+\sum_{k=1}^{p-1} k^{n(p-1)}$$

е делив со p.

Решение. Бидејќи p е прост број, за секој $k\in\{1,2,3,\ldots,p-1\}$ точно е равенството $(k,p)=1$. Сега, од малата теорема на Фермат имаме

$$k^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}, \quad \text{за } k=1,2,3,\ldots,p-1.$$

Од особините на конгруенции

$$k^{n(p-1)}=(k^{p-1})^n\equiv 1^n\equiv 1 \pmod{p}, \qquad \text{за } k=1,2,3,\ldots,p-1$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{n(p-1)}\equiv p-1 \pmod{p},$$

$$1+\sum_{k=1}^{p-1} k^{n(p-1)}\equiv p\equiv 0 \pmod{p},$$

што трбаше да се докаже.

20. Нека p е прост број и $p>3$. Докажи дека $p^2 \mid \sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1}$.

Решение. Ако p е прост број и $p>3$, тогаш $p-1$ е парен број, па $\frac{p-1}{2}\in\mathbb{N}$.

Збирот $\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1}$ можеме да го запишеме во облик

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1}=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}[k^{2p+1}+(p-k)(p-k)^{2p}]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[k^{2p+1}+(p-k)\left(k^{2p}-\binom{2p}{1}k^{2p-1}p+\binom{2p}{2}k^{2p-2}p^2+\ldots-p^{2p}\right)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[k^{2p+1}+(p-k)k^{2p}+p^2\left(-2(p-k)k^{2p-1}+(p-k)\binom{2p}{2}k^{2p-2}+\ldots+(p-k)p^{2p-2}\right)\right]$$

Од последната низа равенства и од особините на конгруенции добиваме

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1}\equiv\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} pk^{2p} \pmod{p^2}. \qquad (*)$$

За секој $k=1,2,3,\ldots,\frac{p-1}{2}$ имаме $(p,k)=1$ и според малата теорема на Фермат

$$k^p\equiv k \pmod{p}$$

$$k^{2p}\equiv k^2 \pmod{p}$$

$$pk^{2p}\equiv pk^2 \pmod{p^2}.$$

Сега,

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} pk^{2p}\equiv\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} pk^2\equiv p\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^2\equiv p\frac{\frac{p-1}{2}\left(\frac{p-1}{2}+1\right)\left(2\frac{p-1}{2}+1\right)}{6}\equiv p^2\frac{1}{6}\frac{p^2-1}{4} \pmod{p^2}, \qquad (**)$$

Бидејќи $(p,6)=1$ а $p-1$ и $p+1$ се два последователни парни броеви добиваме $8 \mid p^2-1$. Но, p е прост број поголем од 3 и $p-1,p,p+1$ се три последователни природни броеви, па затоа $3 \mid p^2-1$. Значи, $\frac{p^2-1}{24}\in\mathbb{N}$ од каде добиваме

$$p^2\frac{1}{6}\frac{p^2-1}{4}\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Сега од (*) и (**) добиваме

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1}\equiv 0 \pmod{p^2},$$

односно $p^2 \mid \sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1}$.

21. Нека p е прост број.

а) Докажи дека

$$1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+\ldots+(p-1)^{p-1}\equiv -1 \pmod{p}.$$

б) Докажи дека

$$1^p+2^p+3^p+\ldots+(p-1)^p\equiv 0 \pmod{p}$$

Решение. а) Бидејќи p е прост број, за секој $k=1,2,3,\ldots,p-1$ имаме $(k,p)=1$. Според теоремата на Фермат

$$k^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}, \quad k=1,2,3,\ldots,p-1.$$

Сега

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1}\equiv\sum_{k=1}^{p-1} 1=p-1\equiv -1 \pmod{p}.$$

б) Бидејќи p е прост број, за $k=1,2,3,\ldots,p-1$ имаме $(k,p)=1$. Според теоремата на Фермат имаме

$k^p \equiv k \pmod p$, $\quad k = 1, 2, 3, \ldots, p-1$.

Сега,

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^p \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k = \frac{(p-1)p}{2} \pmod p.$$

Бидејќи p е прост непарен број, $p-1$ е парен број и $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$. Според тоа

$$\frac{(p-1)p}{2} \equiv p \equiv 0 \pmod p \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{p-1} k^p \equiv 0 \pmod p.$$

22. Нека k е фиксен цел број поголем од 1, и нека $m = 4k^2 - 3$. Покажи дека постојат цели броеви a и b такви што членовите на низата $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, определена со

$$x_0 = a, \quad x_1 = b \quad \text{и} \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

се взаемно прости со m.

Решение. Можеме да избереме b таков што $b \equiv 2k^2 + k - 2 \pmod m$. Тогаш

$$2b - 1 \equiv 4k^2 + 2k - 4 - 1 \equiv 2k \pmod m.$$

Од последната конгруенција, добиваме

$$(2b-1)^2 - 5 \equiv 4k^2 - 5 \equiv 0 \pmod m,$$

односно

$$(2b-1)^2 \equiv 5 \pmod m$$

$$4b^2 - 4b \equiv 4 \pmod m.$$

Но, $(4, m) = 1$ па според тоа

$$b^2 - b \equiv 1 \pmod m$$

$$b^2 \equiv b + 1 \pmod m.$$

За избраниот b и за $a = 1$, имаме

$$x_2 = x_1 + x_0 = b + 1 \equiv b^2 \pmod m$$

Јасно е дека

$$x_0 = 1 \equiv b^0 \pmod m \quad \text{и} \quad x_1 = b \equiv b^1 \pmod m.$$

Ќе покажеме дека $x_n \equiv b^n \pmod m$. Тврдењето е точно за $n = 0, 1, 2$. Нека претпоставиме дека $x_{n-1} \equiv b^{n-1} \pmod m$ и $x_{n-2} \equiv b^{n-2} \pmod m$. Од индуктивната претпоставка и од особините на конгруенции имаме

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \equiv b^{n-1} + b^{n-2} \equiv b^{n-2}(b+1) \equiv b^{n-2} b^2 \equiv b^n \pmod m.$$

Според принципот на математичка индукција

$$x_n \equiv b^n \pmod m, \qquad (*)$$

за секој $n \in \mathbb{N}$.

Бидејќи $(b, m) = 1$, од особините на НЗД имаме $(b^n, m) = 1$, па според (*)

$$(x_n, m) = 1.$$

23. Даден е системот

$$\begin{cases} x + y = z + u \\ 2xy = zu \end{cases}.$$

Определи ја најголемата вредност на m таков што $m \le \frac{x}{y}$, за секое позитивно целобројно решение (x, y, z, u) на системот за кое $x \ge y$.

Решение. Во множеството на природни броеви ќе ги најдеме решенијата на дадениот систем.

Ако првата равенка ја квадрираме и од неа ја одземеме двојната вредност на втората равенка, добиваме

$$x^2 - 2xy + y^2 = z^2 + u^2$$

$$(x-y)^2 = z^2 + u^2.$$

Според тоа, $(z, u, x-y)$ е питагорина тројка. Познато е дека секоја питагорина тројка има облик

$$z = y(a^2 - b^2), \quad u = 2tab, \quad x - y = t(a^2 + b^2),\ t, a, b \in \mathbb{N}.$$

Но, од равенката на системот $x + y = z + u$, добиваме

$$x = t(a^2 + ab), \quad y = t(ab - b^2), \quad z = t(a^2 - b^2), \quad u = 2tab.$$

Ставајќи $k = \frac{a}{b}$, имаме

$$\frac{x}{y} = \frac{t(a^2+ab)}{t(ab-b^2)} = \frac{b^2\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b}\right)}{b^2\left(\frac{a}{b} - 1\right)} = \frac{k^2+k}{k-1} = k + 1 + 1 + \frac{2}{k-1} = 3 + k - 1 + \frac{2}{k-1} \ge$$

$$\ge 3 + 2\sqrt{(k-1)\frac{2}{k-1}} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Равенство важи за $k - 1 = \sqrt{2}$, односно $k = 1 + \sqrt{2}$. Бидејќи $k \in [1+\sqrt{2}, +\infty)$ добиваме $m = \frac{x}{y} \in (-\infty, 3+\sqrt{2}]$, т.е. $m = 3 + \sqrt{2}$.

24. Да се определи најмалиот природен број $n \ge 4$, таков што од n различни цели броеви може да се изберат четири различни цели броеви a, b, c и d такви што

$$20 \mid a + b - c - d.$$

Решение. Нека S е множество во кое нема четири различни елементи a, b, c и d такви што $20 \mid a + b - c - d$. Според тоа, не може да постојат четири различни елементи a, b, c и d, такви што $a \equiv c \pmod{20}$ и $b \equiv d \pmod{20}$. Навистина,

ако такви броеви постојат, тогаш од особините на конгруенции

$$a+b\equiv c+d \pmod{20}$$

$$a+b-c-d\equiv 0 \pmod{20},$$

т.е. $20\,|\,a+b-c-d$. Значи, нема четири различни елементи a,b,c и d, такви што $a+b$ и $c+d$ имаат исти остатоци при делење со 20.

Сега, ако бројот на различни остатоци на елементите од S при делење со 20 е k, тогаш множеството S не може да има повеќе од $k+2$ елементи. Навистина, ако $r_1,r_2,...,r_k$ се сите различни остатоци на елементите од S, и ако S има $k+3$ елементи, тогаш можни остатоци се $r_1,r_2,...,r_k,r_1,r_1,r_1$, па S ќе го исполнува условот од задачата, што е спротивно на нашата претпоставка.

Нека избереме k елементи од S со различни остатоци по модул 20. Тогаш бројот на збирови на два различни остатоци е еднаков на

$$\frac{k(k-1)}{2}.$$

Ако $k\geq 7$, тогаш

$$\frac{k(k-1)}{2}=\frac{7(7-1)}{2}=21>20,$$

па значи има две суми $a+b$ и $c+d$ кои се исти по модул 20 (според принципот на Дирихле). Значи k не може да е поголем од 6 и S не може да има повеќе од 8 елементи. Еден таков пример е

$$S=\{0,20,40,1,2,4,7,12\}.$$

Конечно, множество со $n=9$ елементи секогаш има 4 различни елементи a,b,c,d такви што

$$20\,|\,a+b-c-d.$$

25. Пресликувањето f, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е такво што за секои $m,n\in\mathbb{N}$, бројот $[f(m)]^2+f(n)$ е делител на $(m^2+n)^2$.

Докажи дека $f(n)=n$, за секое $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Ако избереме $m=n=1$, тогаш $(f(1))^2+f(1)$ е делител на $(1^2+1)^2=4$. Според тоа $f(1)=1$.

Ќе покажеме дека $f(p-1)=p-1$ за секој прост број p. Ако избереме $m=1, n=p-1$, тогаш $[f(1)]^2+f(p-1)$ е делител на $(1^2+p-1)^2=p^2$. Оттука следува дека $f(p-1)=p-1$ или $f(p-1)=p^2-1$.

Ако $f(p-1)=p^2-1$, тогаш $f(1)+(f(p-1))^2=1+(p^2-1)^2=p^4-2p^2+2$ е делител на $(1+(p-1)^2)^2=(p^2-2p+2)^2$. Но за било кој прост број p, $(p^2-2p+2)^2<p^4-2p^2+2$. Според тоа,

$$f(p-1)=p-1.$$

Сега, нека n е произволен природен но фиксен број. Според претпоставките од задачата, за $m=p-1$ каде p е прост број, $A=f(n)+(f(p-1))^2=f(n)+(p-1)^2$ е делител на $(n+(p-1)^2)^2$. Од друга страна, заради равенството

$$(n+(p-1)^2)^2-(n-f(n))^2=(f(n)+(p-1)^2)(2n+(p-1)^2-f(n))=$$
$$=A(2n+(p-1)^2-f(n))$$

добиваме дека $A\,|\,(n-f(n))^2$, т.е.

$$(f(n)+(p-1)^2)\equiv(n-f(n))^2 \pmod{A}.$$

Од произволноста на $p\in\mathbb{N}$, кој е проист број, последното е можно ако и само ако $n-f(n)=0$, т.е. $f(n)=n$.

Од произволноста на $n\in\mathbb{N}$ следува тврдењето на задачата.

Подготвителни задачи за математички натпревари
(продолжение)

Тема: **Функционални равенки**

Подготвил: **Алекса Малчески**, Машински факултет-Скопје

22. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x-f(y))=xf(y)-yf(x)+g(x).$$

за произволни $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Ќе ја разгледаме дадената равенка

$$f(x-f(y))=xf(y)-yf(x)+g(x) \qquad (*)$$

за $x=0$, при што таа го добива обликот

$$f(-f(y))=yf(0)+g(0). \qquad (1)$$

Заради последниот облик, важни се два случаи.

Случај 1. $f(0)=0$

Ако во (*) замениме $y=0$, тогаш $f(x)=g(x)$. Од друга страна, од (1) имаме $f(-f(y))=0$. Пак ако во (*) на местото на y ставиме $-f(y)$, тогаш равенката заради последните равенства, го добива обликот

$$f(y)f(x)=0.$$

Од последното равенство имаме $f(x)\equiv 0$, $x\in\mathbb{R}$. Според тоа, $f(x)=g(x)=0$, за $x\in\mathbb{R}$. Непосредно се проверува дека овие функции се решение на равенката.

Случај 2. $f(0)\neq 0$

Тогаш од (1) имаме дека f е биективно пресликување.

а) Ако $f(u)=f(v)$, тогаш $-f(u)=-f(v)$, односно $f(-f(u))=f(-f(v))$. Заради (1) имаме $-uf(0)+g(0)=-vf(0)+g(0)$, односно $u=v$. Значи, f е инјекција.

б) Ако $z\in\mathbb{R}$, тогаш за $y=\dfrac{g(0)-z}{f(0)}$ имаме $f(-f(y))=z$, т.е. f е сурјекција.

Бидејќи f е биекција, постои $c\in\mathbb{R}$ таков што $f(c)=0$. За $y=c$ со замена во (*)

$$f(x)=-cf(x)+g(x)$$
$$(1+c)f(x)=g(x)$$

Сега е јасно дека $g(c)=0$. Ако во (*) замениме $x=c$, тогаш

$$f(c-f(y))=cf(y).$$

Ако за $f(y)$ избереме $c-x$ (бидејќи f е сурјекција) се добива

$$f(x)=c(c-x)$$
$$g(x)=(1+c)(c^2-cx).$$

Не е тешко да се провери дека $f(x)=c(c-x)$ и $g(x)=(1+c)(c^2-cx)$ се решение на (*), без разлика на изборот на c.

Јасно за $c=0$ се добива решението $f(x)=g(x)=0$.

23. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција, таква што

$$f(xy)=f(x)f(y)$$
$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Определи ја $f(x)$.

Решение. Ако избереме $y=0$, $x\in\mathbb{R}$, тогаш лесно добиваме дека $f(0)=0$. Навистина

$$f(x)=f(x)+f(0)+2x\cdot 0=f(x)+f(0) \qquad\Rightarrow\qquad f(0)=0.$$

Ако избереме $x=1$ и $y=-1$, тогаш добиваме

$$f(0)=f(1+(-1))=f(1)+f(-1)+2\cdot 1\cdot(-1)=f(1)+f(-1)-2,$$

односно $f(1)+f(-1)=2$.

Понатаму, за $x\in\mathbb{R}$ и $y=-x$ имаме

$$0=f(0)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)+2x(-x)=f(x\cdot 1)+f(x\cdot(-1))-2x^2=$$
$$=f(x)f(1)+f(x)f(-1)-2x^2=f(x)[f(1)+f(-1)]-2x^2=2f(x)-2x^2$$

Значи, $f(x)=x^2$. Не е тешко да се провери дека добиената функција ги задоволува дадените равенки.

24. Определи ги сите функции $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, такви што за секои $x,y>0$

$$f(f(x)+y)=xf(1+xy). \qquad (1)$$

Решение. Ќе покажеме дека f е нерастечка функција. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека постојат $a,b\in(0,+\infty)$ такви што $a<b$ и $f(a)<f(b)$. За реалниот број $w=\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}$ не е тешко да се докаже дека $w>0$ и $w>f(b)$.

Ако $x=a$ и $y=w-f(a)$ замениме во (1) се добива $f(w)=af\left(1+ab\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$.

Ако пак замениме $x=b$ и $y=w-f(b)$ добиваме $f(w)=bf\left(1+ab\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$.

Според тоа $a=b$ што е во спротивност со претпоставката. Значи f е нерастечка функција, т.е. ако $0<a<b$, тогаш $f(b)\le f(a)$.

Ако избереме $x=y=1$, тогаш $f(f(1)+1)=1f(1+1\cdot 1)=f(2)$. Ако избереме $x=1$, $y=2$ добиваме $f(f(1)+2)=f(1+2)=f(3)$. Ако пак избереме $x=2$, $y=1$, добиваме $f(f(2)+1)=2f(1+2)=2f(3)$. Сега

$$2f(3)=f(f(2)+1)=f(f(f(1)+1)+1)=(f(1)+1)f(1+(f(1)+1)\cdot 1)=$$
$$=(f(1)+1)f(2+f(1))=(f(1)+1)f(3).$$

Од тоа што $f(3)>0$, следува $f(1)+1=2$, т.е. $f(1)=1$.

Нека $x>1$ и ако избереме $y=1-\dfrac{1}{x}$, тогаш

$$f\left(f(x)+1-\frac{1}{x}\right)=xf\left(1+x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=xf(x). \qquad (2)$$

Ако $f(x)>\dfrac{1}{x}$, тогаш $f(x)-\dfrac{1}{x}+1>1$ и заради монотоноста $f\left(f(x)+1-\dfrac{1}{x}\right)\le f(1)=1$. Тогаш од (2), $xf(x)\le 1$, т.е. $f(x)\le\dfrac{1}{x}$ што е во спротивност со претпоставката. Значи $f(x)\le\dfrac{1}{x}$.

Ако претпоставиме дека $f(x)<\dfrac{1}{x}$, со аналогни разгледувања се добива $f(x)\ge\dfrac{1}{x}$.

Од претходните разгледувања добиваме $f(x)=\dfrac{1}{x}$ за $x>1$.

Ако $x>0$, тогаш $f(x)+1>1$ и според тоа

$$f(f(x)+1)=\frac{1}{f(x)+1}. \qquad (3)$$

Ако пак во во почетната равенка замениме $y=1$, добиваме

$$f(f(x)+1)=xf(1+x)=\frac{x}{1+x}. \qquad (4)$$

Од (3) и (4) лесно се добива $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$.

25. Да се определат сите функции $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ такви што

$$xf\left(x+\frac{1}{y}\right)+yf(y)+\frac{y}{x}=yf\left(y+\frac{1}{x}\right)+xf(x)+\frac{x}{y},$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Решение. Доволно е да се воведе помошната функција $g(x)=f(x)-x$. Тогаш се добива функционалната равенка

$$xg\left(x+\frac{1}{y}\right)+yg(y)=yg\left(y+\frac{1}{x}\right)+xg(x). \qquad (1)$$

а) Ако во (1) замениме $y=1$ се добива равенката

$$g\left(1+\frac{1}{x}\right)=xg(x+1)+g(1)-xg(x). \qquad (2)$$

Ако наместо x во (2) замениме $\frac{1}{x}$ се добива равенката

$$g\left(1+\frac{1}{x}\right)=xg(x+1)-xg(1)+g\left(\frac{1}{x}\right). \qquad (3)$$

Од (2) и (3) добиваме

$$xg(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)=(x+1)g(1). \qquad (4)$$

б) Ако (1) замениме $y=-1$, равенката го добива обликот

$$g\left(\frac{1}{x}-1\right)=xg(x)+g(-1)-xg(x-1). \qquad (5)$$

Ако наместо x замениме $\frac{1}{x}$ добиваме

$$g\left(\frac{1}{x}-1\right)=g\left(\frac{1}{x}\right)-xg(x-1)+xg(-1). \qquad (6)$$

Од (5) и (6) добиваме

$$xg(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)=-(x-1)g(-1). \qquad (7)$$

Сега од (4) и (7) имаме

$$g(x)=\frac{g(1)-g(-1)}{2}+\frac{g(1)+g(-1)}{2}\frac{1}{x},$$

односно

$$f(x)=\frac{g(1)-g(-1)}{2}+\frac{g(1)+g(-1)}{2}\frac{1}{x}+x.$$

Бидејќи $g(1)$ и $g(-1)$ се произволни, добиваме $f(x)=A+\frac{B}{x}+x$, а не е тешко да се провери дека секоја ваква функција е решение на равенката.

Подготвителни задачи за математички натпревари

Тема: Неравенства

Подготвил: Алекса Малчески, Машински факултет-Скопје

1. Ако n е природен број, тогаш $(n!)^2 \ge n^n$ ($n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$). Докажи!

2. Нека a е позитивен реален број и $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа за која $x_1=a$ и

$$x_{n+1}\ge (n+2)x_n-\sum_{k=1}^{n}kx_k\ .\ .$$

Докажи дека постои природен број n таков што $x_n \ge 2011!$.

3. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=1$. Докажи дека

$$-\frac{1}{2}\le ab+bc+ca\le 1.$$

4. За секој реален број a,

$$3(1+a^2+a^4)\ge (1+a+a^2)^2.$$

5. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви што $a+b\le c+1$, $b+c\le a+1$, $c+a\le b+1$. Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2\le 2abc+1.$$

6. Докажи дека

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<2,$$

за секој $n\in\mathbb{N}$.

7. Докажи дека

$$1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\sqrt[4]{\frac{4+1}{4}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}<n+1,\ n\in\mathbb{N}.$$

8. Докажи дека

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge\frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right),$$

за било кои позитивни реални броеви a,b,c.

9. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c.$$

10. Докажи дека за било кои позитивни реални броеви a,b,c е исполнето неравенството

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge a+b+c.$$

11. Докажи дека за било кои позитивни реални броеви $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ е исполнето неравенството

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

12. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}.$$

13. Нека a,b,c се позитивни реални броеви чиј збир е еднаков на 1. Докажи дека

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 3(a^2+b^2+c^2).$$

14. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви што

$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}=2$. Докажи дека $ab+bc+ca\le\frac{3}{2}$.

15. Нека a,b,x,y и z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\ge\frac{3}{a+b}.$$

16. Докажи дека

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2+\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}},$$

за било кои $a,b,c\in\mathbb{R}^+$

17. Нека $x_1,x_2,x_3,...,x_n,y_1,y_2,y_3,...,y_n$ се позитивни реални броеви такви што

а) $0<x_1y_1<x_2y_2<....<x_ny_n$

б) $x_1+x_2+...+x_k\geq y_1+y_2+...+y_k$, за секој $k\in\{1,2,3,...,n\}$.

Докажи дека

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+...+\frac{1}{x_n}<\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+...+\frac{1}{y_n}.$$

18. Нека $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}\subset\mathbb{N}$ е множество такво што ако $B,C\subseteq A$ и $B\neq C$, тогаш

$$\sum_{x\in B}x\neq\sum_{x\in C}x.$$

Докажи дека

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}<2.$$

19. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни реални броеви такви што $x_1x_2...x_n=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+...+\frac{1}{n-1+x_n}\leq 1.$$

20. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$3(a+b+c)\geq 8\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Во кои случаи важи равенство.

21. Реалните броеви $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни и нивниот збир е еднаков на 3. Докажи дека

$$\frac{x_1}{x_2(x_1+x_2+x_3)}+\frac{x_2}{x_3(x_2+x_3+x_4)}+...+\frac{x_n}{x_1(x_n+x_1+x_2)}\geq\frac{n^2}{8}.$$

22. Докажи дека

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)},$$

каде a,b,c,x,y и z се позитивни реални броеви такви што $a\geq b\geq c$ и $x\geq y\geq z$.

23. Нека $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ се различни природни броеви. Докажи дека

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\geq\frac{2n+1}{3}(x_1+x_2+...+x_n).$$

24. За реалните броеви $x_1,x_2,...,x_6$ се исполнети равенствата

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2=6$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0.$$

Докажи дека $x_1x_2x_3x_4x_5x_6\leq\frac{1}{2}$.

25. Нека m и n се природни броеви такви што равенката

$$(x+m)(x+n)=x+m+n$$

има целобројно решение. Докажи дека

Конкурсни задачи за математички натпревари

I година

121. Да се определат вредностите на изразот

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)},$$

за оние a,b и c за кои тој е определен.

122. Должините на страните на еден правоаголен триаголник се природни броеви. Производот на должините на катетите е еднаков на тројната вредност на неговиот периметар. Определи ги сите такви триаголници.

123. а) За реални броеви a и b е исполнето равенството

$$(a+b)^2+1=(a+1)(b+1).$$

Дали за a и b е исполнето равенството

$$a^2(a-1)=b^2(b-1).$$

б) За реалните броеви a и b е точно равенството

$$a^2(a-1)=b^2(b-1).$$

Дали за нив е исполнето и равенството

$$(a+b)^2+1=(a+1)(b+1).$$

II година

124. Дадени се квадратните триноми $f(x)=x^2+2a_1x+b_1$, $g(x)=x^2+2a_2x+b_2$ и $h(x)=x^2+2a_3x+b_3$, при што $a_1a_2a_3=b_1b_2b_3>1$. Барем еден од нив има реални и различни корени.

125. Определи ги потребните и доволните услови за реалните параметри a,b и c така што равенката

$$a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c=x$$

нема реални решенија.

126. Две кружници со еднакви радиуси се сечат во точките A и B. Низ A е повлечена права која ги сече кружинците во точките C и D. Низ точката B е повлечена права нормална на правата CD, а која кружинците ги сече во точките E и F. Докажи дека точките C,D,E и F се темиња на ромб?

III година

127. Докажи дека

$$|\sin x|+|\sin y|+|\cos(x+y)|\geq 1,$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}$.

128. Докажи дека, отсечката што ги сврзува ортоцентарот и тежиштето на остроаголниот триаголник ABC е паралелна со страната AB ако и само ако

$$tg\angle A \cdot tg\angle B = 3.$$

129. Впишаната кружница во еден правоаголен триаголник е опишана кружница за друг правоаголен триаголник. Ако S е плоштина на првиот а S' е плоштината на другиот правоаголен триаголник докажи дека

$$\frac{S}{S'} \geq 3+2\sqrt{2}.$$

IV година

130. Триангулација на конвексен многуаголник е разделување на многуаголникот на триаголници со повлекување на негови дијагонали кои не се сечат во негова внатрешна точка.

Определи го бројот на триангулации на конвексен n-аголник, така што секој делбен триаголник има заедничка страна со n-аголникот.

131. Да се определат сите функции f за кои

$$\frac{1}{x}f(-x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=x,$$

за $x \neq 0$.

132. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што $abcd=1$. Докажи дека

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d} \geq 4.$$

СОДРЖИНА

М-р. З.Трифунов, Д-р. Л.Стојановска, В. Стојановски, Екстрми и нивна визуелизација 1
Ј. Маркоска, Д-р. Ѓ. Маркоски, Геометриски начин на решавање системи равенки, 1 дел 8
Наградна задача 13
Задача на бројот Сигма 91 13
СЕУМНАЕСЕТТА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА,Скопје, 11.IV.2010 год. 14
Решение на задача на бројот Сигма 90 17
Рубрика задачи СИГМА 90 – решенија 18
Решение на наградната задача Сигма 90 26
Рубрика задачи СИГМА 91 27
МАТУРА јуни, Основно ниво 28
Наставни тестови 31
Конкурсни задачи за матемтички натпревари - решенија 35
Д-р. А. Малчески, ПОГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ ЗА МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАРИ
Тема: Теорија на бросви-конгруенции 42
Д-р. А. Малчески, ПОГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ ЗА МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАРИ
Тема: Функционални равенки -продолжение 57
Д-р. А. Малчески, ПОГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ ЗА МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАРИ
Тема: Неравенства 60
Конкурсни задачи за математички натпревари 63