$x^3+y^3+z^3=2002$

LVI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ
16.III-2013

I година

1. Најди ги сите целобројни решенија на равенката $\boxed{x^3+y^3=2013.}$

Решение. Бидејќи a^3 при делење со 9 може да има остаток 0,1 и 8, x^3+y^3 може да има остаток 0,1,2,7 и 8. Бидејќи $2013=9\cdot 223+6$ добиваме дека равенката $x^3+y^3=2013$ нема решенија во множеството цели броеви.

2. Докажи дека $e+f<2a+h$, каде што e и f се должини на дијагоналите на некој ромб, а a е должина на страната на ромбот а h е должината на висината на ромбот.

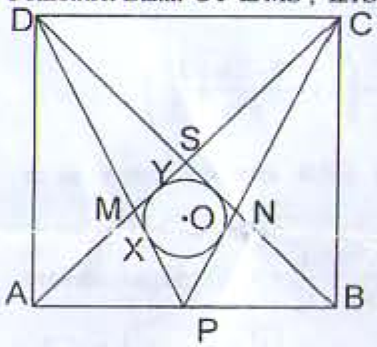
Решение. Од формулата за плоштина на ромб имаме $\frac{ef}{2}=ah \Rightarrow ef=2ah$. Од Питагоровата теорема меѓу страната и дијагоналите на ромбот, имаме $\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2=a^2$, т.е. $e^2+f^2=4a^2$, па,

$$(e+f)^2=e^2+2ef+f^2=4a^2+2ef=4a^2+4ah<4a^2+4ah+h^2=(2a+h)^2,$$

од каде (заради $e+f>0$ и $2a+h>0$) следува дека $e+f<2a+h$.

3. Даден е квадратот $ABCD$. Дијагоналите на квадратот се сечат во точка S и P е средина на страната AB. Нека M е пресечна точка на AC и PD а N на BD и PC. Во четириаголникот $PMSN$ е вишшан кружница. Докажи дека радиусот на таа кружница е еднаков на $\overline{MP}-\overline{MS}$.

Решение. Важи $OY \perp MS$, $\measuredangle YSO=\measuredangle ASP=45^\circ$ (SP е симетрала на $\measuredangle MSN$).



Тогаш, $\Delta SYO \sim \Delta SPA$, па ΔSYO е правоаголен и рамнокрак и оттука следува дека $\overline{SY}=\overline{YO}=r$.

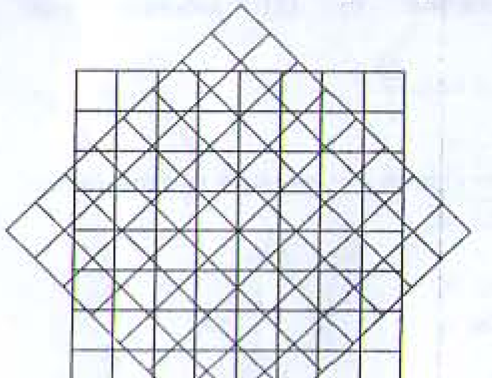
Триаголниците OXP и PAD се слични бидејќи $\measuredangle OXP=\measuredangle DAB=90^\circ$, $\measuredangle OPX=\measuredangle PDA$. Од сличноста имаме $\overline{XP}:\overline{XO}=\overline{AD}:\overline{AP}=2 \Rightarrow \overline{XP}=2r$.

Бидејќи X и Y се допирни точки на тангентата на кружницата повлечени од точката M имаме $\overline{MY}=\overline{MX}$. Конечно,

$\overline{MP}-\overline{MS}=(\overline{MX}+\overline{XP})-(\overline{MY}+\overline{YS})=\overline{XP}-\overline{YS}=2r-r=r$

4. Две еднакви шаховски табли (8×8 полиња) имаат заеднички центар и едната од нив потполно ја покрива другата (поставени се една над друга). Едната од нив се ротира околу центарот за 45°. Одреди ја плоштината на пресекот на сите црни полиња на едната табла со сите црни полиња на другата табла ако плоштината на едно поле е 1.

Решение. Нека означиме со S_{cc} - збир на сите заеднички плоштини на црните полиња на горната и црните полиња на долната табла (т.е. тоа што се бара да се пресмета во задачата), со S_{cb} - збир на сите заеднички плоштини на црните полиња на горната и белите полиња на долната табла, со S_{bc} - збир на сите заеднички плоштини на белите полиња на горната и црните полиња на долната табла и со S_{bb} - збир на сите заеднички плоштини на белите полиња на горната и белите полиња на долната табла.



Тогаш, $S=S_{cc}+S_{cb}+S_{bc}+S_{bb}$, каде што S е плоштина на правилниот осумаголник кој е пресек на двете табли кога ќе се изврши ротирањето на горната табла за 45° како на сликата. Нека оваа положба на таблите е почетна.

Ако горната табла се заротира за 90° околу центарот, тогаш црните полиња на таа табла ќе дојдат на местото од нејзините бели полиња, па имаме $S_{cc}=S_{bc}$ и $S_{cb}=S_{bb}$.

Ако долната табла се заротира за 90° околу центарот, тогаш црните полиња на таа табла ќе дојдат на местото од нејзините бели полиња, па имаме $S_{cc}=S_{cb}$ и $S_{bc}=S_{bb}$. Значи $S_{cc}=S_{cb}=S_{bc}=S_{bb} \Rightarrow S_{cc}=\frac{1}{4}S$.

Исто така важи дека плоштината на заедничкиот осумаголник се добива кога од плоштината на целата табла ќе се одземе плоштината на четирите правоаголни триаголници што се наоѓаат на краевите на таблата, т.е. $S=64-4P$. Останува уште да ја пресметаме плоштината P. Триаголникот е рамнокрак правоаголен и ако со a ја обележиме хипотенузата, а со h висината спуштена спрема хипотенузата, имаме дека $a=2h$. Ако пак со d ја означиме дијагоналата на таблата, тогаш имаме $d=2h+8$, т.е. $h=\frac{d-8}{2}=\frac{8\sqrt{2}-8}{2}=4(\sqrt{2}-1)$. Тогаш за плоштината на триаголникот добиваме: $P=\frac{ah}{2}=h^2=16(\sqrt{2}-1)^2=16(3-2\sqrt{2})$ т.е.

$S=64-4P=128(\sqrt{2}-1)$

$S_{cc}=32(\sqrt{2}-1)$.

2 година

1. За коефициентите a,b,c на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ важи равенството $2b^2-9ac=0$, ако и само ако едниот корен на равенката е двапати поголем од другиот корен. Докажи!

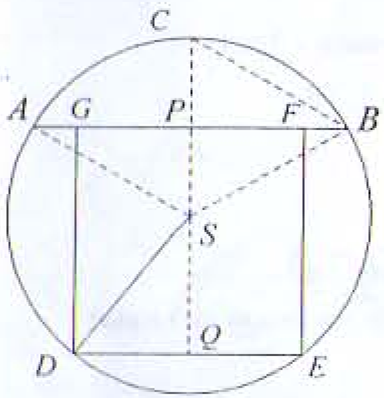
Решение. Нека x_1 и x_2 се двата корени на равенката $ax^2+bx+c=0$. Од условот $2b^2-9ac=0$, дискриминантата на равенката е $b^2-4ac=b^2-4\frac{2b^2}{9}=\frac{b^2}{9}$ и затоа корените на равенката се $x_{1/2}=\frac{-b\pm\frac{|b|}{3}}{2a}=\frac{-3b\pm|b|}{6a}$. Ако $b>0$ добиваме $x_1=\frac{-2b}{6a}=-\frac{b}{3a}$ и $x_2=\frac{-4b}{6a}=-2\frac{b}{3a}$. Тогаш, $x_2=2x_1$. Слично добиваме и ако $b<0$.

Ако $b=0$ од равенството $2b^2-9ac=0$ добиваме дека $c=0$ (заради $a\neq 0$), па само $x=0$ е корен на равенката. Следува дека тврдењето важи за $b=0$.

Обратно. Нека едниот корен на равенката е двапати поголем од другиот корен. Да претпоставиме дека $x_2=2x_1$. Тогаш $x_1+x_2=3x_1=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=2x_1^2=\frac{c}{a}$. Значи, $\frac{c}{2a}=x_1^2=\left(-\frac{b}{3a}\right)^2=\frac{b^2}{9a^2}$ и оттука $2b^2-9ac=0$.

2. Тетивата AB ја дели една кружница со радиус r на два лаци во однос 1:2. Во поголемиот дел вишшан е квадрат чија една страна лежи на таа тетива. Изрази ја должината на страната на квадратот преку радиусот r.

Решение. Исто како што тетивата AB ја дели кружницата на два лаци во однос 1:2 така и соодветните централни агли се однесуваат во однос 1:2, т.е. едниот е 120°, а другиот е 240°. Нека со S го означиме центарот на кружницата. Нека C е точка од омалиот лак, така што $SC \perp AB$ и $SC \cap AB=\{P\}$ и $SC \cap DE=\{Q\}$.



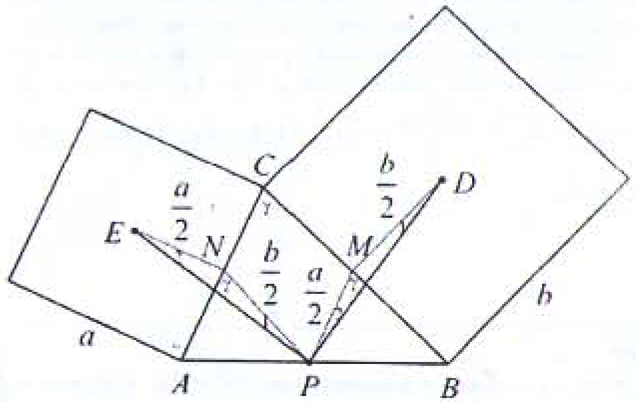
Тогаш имаме $\measuredangle ASB=120^\circ$, а $\measuredangle CSB=60^\circ$. Од тоа што триаголникот CSB е рамностран ($\overline{SB}=\overline{SC}=r$, а аголот меѓу нив е 60°) следува дека BP е висина во овој триаголник и ја дели страната SC на половина, т.е. $\overline{SP}=\frac{r}{2}$, а заради ова $\overline{SQ}=a-\frac{r}{2}$, каде што со a е означена страната на квадратот $DEFG$.

Од правоаголниот ΔSDQ со примена на Питагорова теорема, имаме:

$r^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(a-\frac{r}{2}\right)^2$ т.е. $5a^2-4ar-3r^2=0$.

Бидејќи $a>0$ се добива $a=\frac{4r+\sqrt{16r^2+60r^2}}{10}$, т.е. $a=\frac{2+\sqrt{19}}{5}r$.

3. Од надворешноста на страните AC и BC во триаголникот ABC, се конструирани квадрати (со страни AC и BC) и со центри D и E. Нека P е средина на страната AB. Докажи дека отсечките PD и PE се еднакви и заемно нормални.



Решение. Нека M и N се средини на страните BC и AC и аголот при темето C е γ.

Тогаш $\Delta PEN \cong \Delta DPM$, бидејќи имаат по една страна со должина $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$, а аглите меѓу тие страни се еднакви на $90^0+\gamma$

($\overline{PN}=\frac{b}{2}$ како средна линија, $\overline{MD}=\frac{b}{2}$, $\overline{NE}=\frac{a}{2}$ и $\overline{PM}=\frac{a}{2}$ како средна линија,

$\angle PNE=90^0+\angle PNA=90^0+\gamma$ и

$\angle PMD=90^0+\angle PMB=90^0+\gamma$).

Следува отсечките PD и PE се еднакви. Исто така $\angle EPN=\angle PDM$ и $\angle PEN=\angle DPM$.

Бидејќи четириаголникот $MPNC$ е паралелограм, следува дека $\angle MPN=\gamma$, од каде

$$\angle EPD=\angle EPN+\gamma+\angle MPD=\angle EPN+\gamma+\angle NEP=\gamma+(180^\circ-(90^\circ+\gamma))=90^\circ.$$

4. Реши ја равенката $\sqrt{5-x}=x^2-5$.

Решение. Дефиниционата област на равенката е множеството $(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},5)$. За $x\in(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},5)$ дадената равенка е еквивалентна со равенката $5-x=(x^2-5)^2$.

Ќе ја запишеме равенката како квадратна по бројот 5, т.е. $\underline{5^2}-(1+2x^2)\underline{5}+x^4+x=0$.

Оттука ги добиваме равенките:

$$5=\frac{(1+2x^2)+(1-2x)}{2}\Leftrightarrow x^2-x-4=0 \text{ и } 5=\frac{(1+2x^2)-(1-2x)}{2}\Leftrightarrow x^2+x-5=0.$$

Со директна проверка забележуваме дека само $x_1=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ припаѓаат на дефиниционата област.

3 година

1. Докажи дека ако $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$ тогаш $|ac-bd|\le 1$.

Решение 1. Бидејќи $a,b,c,d\in[-1,1]$ следува дека постојат реални броеви α,β такви што $a=\sin\alpha, b=\cos\alpha, c=\sin\beta, d=\cos\beta$.

Тогаш $ac-bd=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=-\cos(\alpha+\beta)$, па следува дека $|ac-bd|=|-\cos(\alpha+\beta)|\le 1$.

Решение 2. Од $(|a|-|c|)^2\ge 0$ и $(|b|-|d|)^2\ge 0$ следува дека $|ac|\le\frac{a^2+c^2}{2}$ и $|bd|\le\frac{b^2+d^2}{2}$.

Користејќи го неравенството на триаголник и горните неравенства добиваме

$$|ac-bd|\le|ac|+|bd|\le\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+d^2}{2}=\frac{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

2. Докажи дека за секој реален број x важи неравенството $\cos(\sin(x))>\sin(\cos(x))$.

Решение. Нека $f(x)=\cos(\sin(x))$ и $g(x)=\sin(\cos(x))$. Очигледно е дека $T=2\pi$ е период на $f(x)$ и $g(x)$.

Затоа доволно е да се докаже неравенството на интервалот $[-\pi,\pi]$.

Двете функции се парни и затоа е доволно да се докаже неравенството на интервалот $[0,\pi]$. За $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $f(x)>0$ и $g(x)\le 0$ па останува да се докаже неравенството на интервалот $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

За $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ имаме

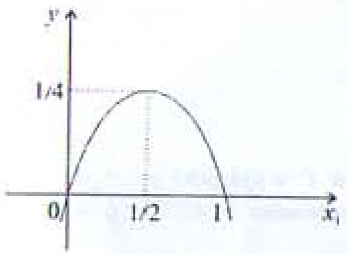
$$\cos(\sin(x))=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin(x)\right)>\sin(\cos(x))\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}-\sin(x)>\cos(x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sin(x)+\cos(x)<\frac{\pi}{2}$$

Последново неравенство е точно заради

$$\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$$

Со тоа неравенството е докажано.

3. **За** $x_1,x_2>0$, $x_1+x_2=1$, **докажи дека** $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2\ge\frac{25}{2}$.

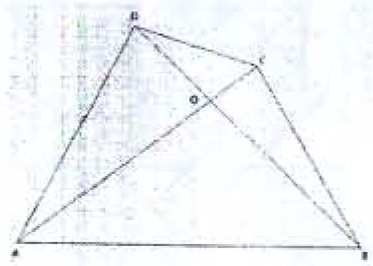


Решение 1. Нека $y=x_1x_2=x_1(1-x_1)$. За $x_1>0$, разгледувајќи го y како квадратна функција, заклучуваме дека функцијата е растечка на интервалот $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ со максимум во $x_1=\frac{1}{2}$ и тогаш $y=\frac{1}{4}$. Јасно, како функција по x_1, $y\le\frac{1}{4}$. Ќе го средиме изразот $L=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2-\frac{25}{2}$.

Имено, $L=x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+4-\frac{25}{2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}+4-\frac{25}{2}=-\left(2y-\frac{1-2y}{y^2}+\frac{15}{2}\right)$ $=-\frac{4y^3+15y^2+4y-2}{2y^2}$. За $y\le\frac{1}{4}$, $4y^3+15y^2+4y-2\le\frac{4}{4^3}+\frac{15}{4^2}+1-2=0$, па $L\ge 0$ што требаше и да се докаже.

Решение 2. Изразот на левата страна од неравенството е еднаков на $x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+4$. Од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина за позитивните броеви x_1 и x_2 добиваме $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\ge\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}$, односно $x_1^2+x_2^2\ge\frac{1}{2}$....(1). Исто така важи и $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}$...(2). Бидејќи $\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2\ge 0$ следува дека $x_1x_2\le\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{x_1x_2}\ge 4$...(3). Ако (1) и (3) ги замениме во (2) добиваме дека $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}\ge\frac{1}{2}\cdot 16=8$. На крај имаме $x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+4\ge\frac{1}{2}+8+4=\frac{25}{2}$.

4. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник во кој должините на сите страни и дијагонали се рационални броеви. Ако O е пресекот на дијагоналите, докажи дека $\overline{AO}$ е рационален број.



Решение. Ќе означиме $\beta_1=\angle ABO$, $\beta_2=\angle CBO$, $\beta=\angle ABC$, $\delta_1=\angle AOB$ и $\delta_2=\angle BOC$. Да забележиме дека $\sin\delta_1=\sin\delta_2$. Од синусна теорема за триаголниците ABO и CBO, имаме $\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}=\frac{\sin\beta_1}{\sin\delta_1}$ и $\frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}=\frac{\sin\delta_1}{\sin\beta_2}$. Од овие равенства добиваме $\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$. Од косинусна теорема за триаголниците ABC, ABD и DBC, бидејќи сите страни и дијагонали на четириаголниот се рационални броеви, следува дека $\cos\beta$, $\cos\beta_1$ и $\cos\beta_2$ се рационални броеви. Да забележиме дека

$$\cos\beta = \cos\beta_1\cos\beta_2 - \sin\beta_1\sin\beta_2$$

, што следува дека и $\sin\beta_1\sin\beta_2$ е рационален број. Па сега

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{\sin\beta_1\sin\beta_2}{\sin^2\beta_2} = \frac{\sin\beta_1\sin\beta_2}{1-\cos^2\beta_2}$$

од што добиваме дека и $\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}}$ е рационален број. Но, тогаш и $\frac{\overline{OC}}{\overline{AO}}+1=\frac{\overline{AC}}{\overline{AO}}$ е рационален број. Конечно, бидејќи $\overline{AC}$ е рационален број добиваме дека и $\overline{AO}$ е рационален број.

---

4 година

1. Докажи дека за сите реални броеви $x, y > 1$ важи неравенството $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 8$.

Решение 1. Земаме смени $a = x-1$ и $b = y-1$. Од условот на задачата следува дека a и b се позитивни реални броеви. Неравенството кое треба да го докажеме е еквивалентно со неравенството $\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\geq 8$...(1) Од неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивните броеви a и 1 важи $a+1\geq 2\sqrt{a}$ т.е. $(a+1)^2\geq 4a$.

На ист начин добиваме дека важи $(b+1)^2\geq 4b$. Сега ако замениме во (1) имаме

25

$$\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\geq\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}=4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4\cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=8.$$

Решение 2. Од неравенство меѓу геометриска и хармониска средина за позитивните броеви x и $\frac{x}{y-1}$ добиваме

$\sqrt{x\cdot\frac{x}{y-1}}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{y-1}{x}}=2\cdot\frac{x}{y}$, т.е. $\frac{x^2}{y-1}\geq 4\cdot\frac{x^2}{y^2}$...(1). На ист начин се добива дека $\frac{y^2}{x-1}\geq 4\cdot\frac{y^2}{x^2}$...(2) Со собирање на (1) и (2) имаме $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 4\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)\geq 4\cdot 2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y^2}{x^2}}=8.$

2. Нека k е природен број. Докажи дека аритметичка прогресија чија разлика е природен број или не содржи ниту еден член кој е k-ти степен на природен број или содржи бесконечно многу.

Решение. Нека a е првиот член на аритметичката прогресија и d е нивната разлика ($d\in\mathbb{N}$). Ако a не е

?? природен број тогаш тврдењето важи бидејќи прогресијата не содржи ниеден природен број. Нека a е природен број и нека b^k (за некој b природен број) е член на прогресијата. Јасно, постои природен број n така што $b^k = a+nd$. Тогаш, сите броеви од облик $(b+md)^k, m\in\mathbb{N}$, исто така се членови на таа аритметичка прогресија, бидејќи важи

$$(b+md)^k = b^k + kb^{k-1}md + \binom{k}{2}b^{k-2}m^2d^2+\ldots+m^kd^k,$$

па оттука следува дека $(b+md)^k = b^k+dt = a+nd+dt = a+d(n+t)$, каде t е некој природен број. Со тоа доказот е завршен.

3. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x, y\in\mathbb{R}$ важи $f(x^2+f(y)) = y-x^2$.

Решение. Ако ставиме $x=0$, добиваме $f(f(y))=y$, за секој $y\in\mathbb{R}$. Па, затоа за $x, y\in\mathbb{R}$ имаме

$$f(y-x^2) = f(f(x^2+f(y))) = x^2+f(y).$$

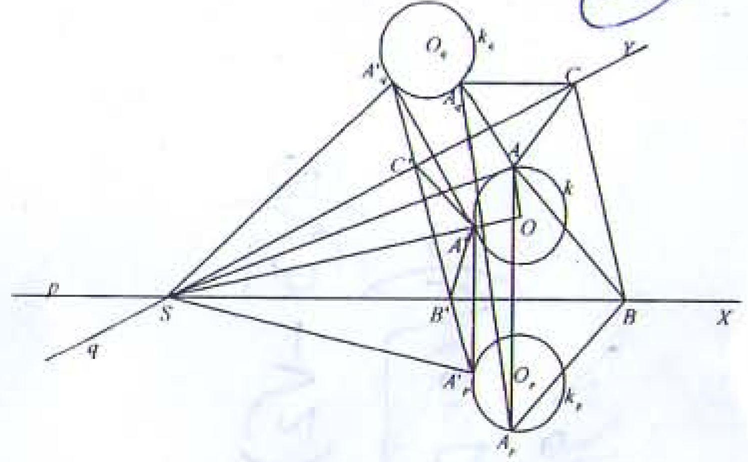
Ако замениме $y=x^2$ во последното равенство имаме:

$f(x^2-x^2)=f(0)=x^2+f(x^2)$, односно $f(x^2)=f(0)-x^2$. Ако замениме $y=0$ добиваме $f(-x^2)=x^2+f(0)$. Одовде можеме да заклучиме дека $f(x)=-x+C$, за секој реален број x, каде $C=f(0)$. Навистина, сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+C$, $C\in\mathbb{R}$ го задоволуваат условот на задачата:

$$f(x^2+f(y)) = f(x^2-y+C) = -(x^2-y+C)+C = y-x^2.$$

25

4. Нека е даден $\measuredangle XSY = \alpha < 90^\circ$ и $k(O,r)$ е кружница која целосно се наоѓа во α. Нека ABC е триаголник таков што A е на k, B е на правата $p\equiv SX$ и C е на правата $q\equiv SY$. Ако $s=\overline{SO}$, пресметај ја најмалата вредност која може да ја достигне периметарот на ваков ΔABC.



Решение. Нека A' е пресечната точка на SO со k, које е меѓу S и O, $k_p(O_p,r)$, $k_q(O_q,r)$ се кружници основиметрични на k во однос на p и q соодветно. A'_p и A'_q се сликите на A', при осните симетрии и B' и C' се пресечни точки на $A'_pA'_q$ со p и q соодветно. Ќе докажеме дека $\Delta A'B'C'$ има најмал периметар од бараните. Нека ΔABC е произволен ваков триаголник и нека A_p и A_q се сликите на A, при осните симетрии, тогаш $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{A_pB}+\overline{BC}+\overline{CA_q}\geq\overline{A_pA_q}$

Од друга страна $\measuredangle A_pSA_q=\measuredangle A_pSA+\measuredangle ASA_q=2(\measuredangle XSA+\measuredangle ASY)=2\measuredangle XSY=2\alpha$, па аголот $\measuredangle A_pSA_q$ не зависи од изборот на точките A, B и C. Исто така од осните симетрии следува дека $\overline{SA_p}=\overline{SA}=\overline{SA_q}$, па ΔA_pA_qS е рамнокрак. Од оценката:

$$L_{\Delta ABC}\geq\overline{A_pA_q}=2\overline{SA_p}\sin\alpha=2\overline{SA}\sin\alpha=2\left(\left(\overline{SA}+\overline{AO}\right)-\overline{AO}\right)\sin\alpha\geq$$
$$\geq 2\left(\overline{SO}-\overline{A'O}\right)\sin\alpha=2\overline{SA'}\sin\alpha=L_{\Delta A'B'C'}$$

следува дека $\Delta A'B'C'$ достигнува најмал можен периметар и тој е еднаков на $L_{\Delta A'B'C'}=2\left(\overline{SO}-\overline{A'O}\right)\sin\alpha=2(s-r)\sin\alpha$.

Забелешка: Од условот на задачата мора $s>r$.