Algoritam za računanje inverzne matrice

Algoritam ćemo podijeliti u tri glavna koraka.

1. Napišimo proširenu matricu:

$$[\,A \mid I\,] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right].$$

2. Svedimo pomoću elementarnih transformacija proširenu matricu $[\,A \mid I\,]$ na reducirani oblik. Rezultat je matrica $[\,A_R \mid B\,]$.

3. Ako je $A_R = I$, tada je matrica A regularna i $A^{-1} = B$. Ako je $A_R \neq I$, matrica nije regularna i ne postoji inverzna matrica.

Primjer 8.10 *Odredimo inverznu matricu matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Načinimo proširenu matricu i započnimo s elementarnim transformacijama

$$
\begin{aligned}
[A \mid I] &= \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] && \text{pomnožimo 1. redak s } \frac{1}{2} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] && \text{dodajmo 1. redak} \times (-3) \text{ trećem} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] && \text{pomnožimo 2. redak s } \frac{1}{2} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] && \begin{array}{l} \text{dodajmo 2. redak} \times (-\frac{1}{2}) \text{ prvom} \\ \text{dodajmo 2. redak} \times (\frac{5}{2}) \text{ trećem} \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 1 \end{array}\right] && \text{pomnožimo 3. redak s } -\frac{4}{15} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{15} \end{array}\right] && \begin{array}{l} \text{dodajmo 3. redak} \times (-\frac{7}{4}) \text{ prvom} \\ \text{dodajmo 3. redak} \times (\frac{1}{2}) \text{ drugom} \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{7}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{15} \end{array}\right] \\
&= [I \mid B].
\end{aligned}
$$

A je regularna i

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{7}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{15} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{15} \end{bmatrix}.
$$

Primjer 8.4.1. *Odredite inverz matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. *Imamo*

$$[A \mid I] \quad = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -11 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -8 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

U sljedećem koraku svađanja proširene matrice na reducirani oblik, zadnji redak se množi s -1 i zatim se prave nule u 4. stupcu proširene matrice. Uočite da time ne bismo promijenili niti jedan element matrice A_R koja je već dobivena. Te zadnje elementarne transformacije zapravo nisu potrebne za naš krajnji zaključak. Iz zadnje matrice vidimo da vrijedi $A_R \neq I$ pa matrica A nije regularna i zato nema inverz. Rang polazne matrice A (kao i matrice A_R) je dva.