1. Нека $p_1, p_2 \geq 5$ се прости бореви за кои важи $6 \mid p_1 + p_2$. Докажи дека бројот

$$1^{p_1p_2+1} + 2^{p_1p_2+2} + 3^{p_1p_2+3} + 4^{p_1p_2+4} + 5^{p_1p_2+5} + 6^{p_1p_2+6}$$

е сложен број.

Го користиме добропознатиот факт дека секој прост број, освен 2 и 3 можи да се запише како $6k \pm 1$ за некој $k \in \mathbb{N}$

Сега БГО нека

$$p_1 = 6k - 1; k \in \mathbb{N}$$

па од условот имаме:

$$p_1 + p_2 \equiv 6k - 1 + p_2 \equiv p_2 - 1 \equiv 0 \pmod{6} \implies p_2 = 6n + 1; n \in \mathbb{N}$$

Сега за нивниот производ имаме:

$$p_1p_2 = (6k-1)(6n+1) = 36kn - 6n + 6k - 1 = 6(6kn - n + k) - 1 = 6s - 1; s \in \mathbb{N}$$

Изразот го означуваме со S,заменуваме во него и добиваме:

$$S = 1^{6s} + 2^{6s+1} + 3^{6s+2} + 4^{6s+3} + 5^{6s+4} + 6^{6s+5}$$

Ќе докажеме дека овој број секогаш е делив со 7.

Сега од малата теорема на Ферма имаме:

$$a^6 \equiv 1 \pmod{7} \implies a^{6s} \equiv 1 \pmod{7} \text{ за } (a, 7) = 1$$

Бидејќи сите основи на експонентите се взаемно прости броеви со 7 имаме, работејќи по модул 7:

$$S \equiv 1^0 \cdot 1^{6s} + 2^1 \cdot 2^{6s} + 3^2 \cdot 3^{6s} + 4^3 \cdot 4^{6s} + 5^4 \cdot 4^{6s} + 6^5 \cdot 4^{6s} \pmod{7}$$

$$S \equiv 1^0 + 2^1 + 3^2 + 4^3 + 5^4 + 6^5 \pmod{7}$$

$$S \equiv 1 + 2 + 9 + (-3)^3 + (-2)^4 + (-1)^5 \pmod{7}$$

$$S \equiv 1 + 2 + 9 - 27 + 16 - 1 \equiv 28 - 28 \equiv 0 \pmod{7} \implies 7 \mid S$$

Од ова следи дека $S = 7t; t \in \mathbb{N}$, т.е S секогаш е сложен број под дадените услови.

2) Нека $x, y, z \in \mathbb{R}$, за кои важи $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Докажи дека важи равенството:

$$2(x+y+z) - xyz \leq 10$$

Ги квадрираме двете страни на неравенството и користејќи го неравенството на Коши-Шварц-Буњаковски имаме:

$$(2(x+y+z) - xyz)^2 = (2(x+y) + z(2-xy))^2 \leq ((x+y)^2 + z^2)(2^2 + (2-xy)^2)$$
$$= (\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{9} + 2xy)(4+4-4xy+x^2y^2)$$

$$(2(x+y+z) - xyz)^2 \leq (9+2xy)(8-4xy+x^2y^2)$$

$$(2(x+y+z) - xyz)^2 \leq 72 + 16xy - 36xy - 8x^2y^2 + 9x^2y^2 + 2x^3y^3$$

$$(2(x+y+z) - xyz)^2 \leq 2x^3y^3 + x^2y^2 - 20xy + 72 \qquad (1)$$

Доволно е да покажиме дека десната страна е помала од 100.

Сега БГО нека $z = max\{z, y, x\}$, па следи $z^2 \geq 3$ од условот, па имаме $x^2 + y^2 \leq 6$. Сега од $AM - GM$ имаме:

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2}$$

$$6 \geq 2xy$$

$$3 \geq xy \qquad (2)$$

Се навраќаме назад, нека $t = xy$, од (2) имаме $t \leq 3$, па под овие услови ќе докажиме дека десната страна од (1) има максимална вредност од 100. Ќе го најдеме максимумот со помош на изводи, поставувајќи го првиот извод од полиномот на 0. Па имаме:

$$f(t) = 2t^3 + t^2 - 20t + 72$$

$$f'(t) = 6t^2 + 2t - 20 = 2(t+2)(t-\frac{5}{3}) = 0$$

Од ова добиваме дека минимумот/максимумот се наоѓа во точките $т_1 = -2; т_2 = \frac{5}{3}$. Со проверка за овие вредности и за $t_3 = 3$, поради границата, добиваме дека за $t = -2$ функцијата има максимална вредност и таа изнесува: $f(-2) = 100$. Од ова следи:

$$(2(x+y+z) - xyz)^2 \leq f(xy) \leq 100 \implies (2(x+y+z) - xyz) \leq 10$$

Ш.Т.Д.

Равенство меѓу второто и третото неравенство имаме кога $xy = -2$, а за да добиеме равенство меѓу првото и второто неравенство ги користиме својствата на неравенството на Коши-Шварц-Буњаковски, според кои за равенство треба да е исполнет следниот услов:

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 4k \\ z^2 = (2 - \underbrace{xy}_{-2})^2 k \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y)^2 = 4k \\ z^2 = 16k \end{cases}$$

Заменувајќи во условот имаме:

$$(x+y)^2 - 2xy + z^2 = 9$$

$$4k + 4 + 16k = 9$$

$$20k = 5 \implies k = \frac{1}{4}$$

Сега имаме $z = \pm 2$. но бидејќи $z = max\{z, x, y\}$, следи дека мора $z = 2$

Случај 1: $x + y = 1; xy = -2$

x, y се решенија на равенката:

$$s^2 - s - 2 = 0$$

$$(s-2)(s+1) = 0 \implies x = -1; y = 2$$

Случај 2: $x + y = -1; xy = -2$

x, y се решенија на равенката:

$$s^2 + s - 2 = 0$$

$$(s+2)(s-1) = 0 \implies x = 1; y = -2$$

Од ова следи дека имаме равенство имаме при $(x, y, z) = (-1, 2, 2), (1, -2, 2)$ и сите нивни пермутации, затоа што равенството е симетрично.

3) Најди ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, така што $\forall x, y, \in \mathbb{R}$, важи:

$$f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y)$$

Нека $a \in \mathbb{R}$, така што $f(y) = \frac{a}{2}$ за некој реален број y, тогаш од условот $x = \frac{a}{2}$ е возможно. Па заменувајќи во функционалната равенка имаме:

$$f(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}) = f(\frac{a}{2} - \frac{a}{2}) + 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

$$f(a) = f(0) + a^2$$

Сега заменуваме $a = 0$ и добиваме:

$$f(0) = f(0)$$

Од ова следи дека $f(0)$ може да биде било која вредност па имаме $f(0) = c; c \in \mathbb{R}$. Од ова добиваме дека единствената функција која ги исполнува условите е:

$$f(x) = x^2 + c; c \in \mathbb{R}$$

Со проверка се потврдува дека оваа функција ги исполнува условите.

4) Нека $ABCD$ е квадрат во рамнината Π. Определи ја најмалата и најголемата вредност на функцијата за $f : \Pi \to \mathbb{R}$, оределена со:

$$f(P) = \frac{\overline{PA} + \overline{PB}}{\overline{PC} + \overline{PD}}$$

Најпрво ќе ја најдеме максималната вредност на функцијата.

Нека P е точка на рамнината Π, која не лежи на $\overline{CD}$ и ја определува најголемата вредност на f. Сега од неравенството за триаголник од триаголникот имаме:

$$\frac{\overline{PA} + \overline{PB}}{\overline{PC} + \overline{PD}} < \frac{\overline{PA} + \overline{PB}}{\overline{CD}}$$

Што е контрадикторно со нашата претпоставка дека P ја определува максималната вредност на функцијата.

Од ова следи дека P се наоѓа на отсечката $\overline{CD}$. Бидејќи сега именителот е константа (страната на квадратот) го максимизираме броителот.

Бидејќи функцијата $g(x) = x^2$ е инјективна во множеството на природните броеви и е стриктно растечка функција добиваме дека доколку:

$$a \geq b \iff g(a) \geq g(b) \iff a^2 \geq b^2$$

Па поради ова доволно е да максимизираме: $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$

Најпрво спуштаме нормала од P кон страната $\overline{AB}$ и нејзиното подножје го означуваме со F.

Сега од Питагоровата теорема за $\triangle APF$ и $\triangle BPF$ имаме:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{PF}^2 + \overline{BF}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{PF}^2 + (\overline{AB} - \overline{AF})^2$$

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{PF}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AF}^2 - 2\overline{AFAB}$$

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 3\overline{AB}^2 - 2\overline{AF}(\overline{AB} - \overline{AF})$$

Првиот член на овој израз е константа, а вториот е секогаш непозитивен од очигледното $\overline{AB} \geq \overline{AF}$. Па за да ја добиеме максималната вредност треба да имаме:

$$2\overline{AF}(\overline{AB} - \overline{AF}) = 0 \implies \overline{AF} = 0 \text{ или } \overline{AF} = \overline{AB}$$

Од ова произлегува дека точката $F \equiv A$ или $F \equiv B$, па следи дека функцијата има максимална вредност за $P \equiv D$ или $P \equiv C$

Аналогно добиваме дека за минималната вредност, дека P лежи на $\overline{AB}$, бидејќи имаме:

$$\frac{\overline{PA} + \overline{PB}}{\overline{PC} + \overline{PD}} > \frac{\overline{AB}}{\overline{PC} + \overline{PD}}$$

Па сега максимизираме $\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ и аналогно добиваме дека минимумот се добива за $P \equiv A$ или $P \equiv B$

Сега да ги пресметаме минималната и максималната вредност:

$$f_{max} = f(D) = \frac{\overline{DA} + \overline{DB}}{\overline{DC}}$$

Нека страната на квадратот изнесува a, па имаме:

$$f_{max} = \frac{a + a\sqrt{2}}{a} = 1 + \sqrt{2}$$

$$f_{min} = f(A) = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA} + \overline{DA}}$$

$$f_{min} = \frac{a}{a\sqrt{2} + a} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$$

6) Во множеството на рационални броеви реши ја равенката:

$$3x^2 + 7y^2 = 19z^2$$

Најпрво ќе ја решиме равенката во множеството на рационални броеви равенката:

$$3a^2 + 7b^2 = 19$$

Нека (a_0, b_0) е решение на равенката. Нека $m = a - a_0$ и $n = b - b_0$, тогаш имаме:

$$3(m + a_0)^2 + 7(n + b_0)^2 = 19$$

$$3m^2 + 6ma_0 + \underbrace{3a_0^2 + 7b_0^2}_{19} + 7n^2 + 14nb_0 = 19$$

$$3m^2 + 6ma_0 + 7n^2 + 14nb_0 = 0$$

Сега нека $\lambda = \frac{m}{n}$, па имаме:

$$3\lambda^2 n^2 + 6\lambda n a_0 + 7n^2 + 14nb_0 = 0$$

$$3\lambda^2 n + 6\lambda a_0 + 7n + 14b_0 = 0$$

$$n(3\lambda^2 + 7) = -(6\lambda a_0 + 14b_0)$$

$$n = -\frac{6\lambda a_0 + 14b_0}{3\lambda^2 + 7}$$

Со пробување добиваме дека $(a_0, b_0) = (2, 1)$ е решение, па заменуваме и добиваме:

$$n = -\frac{12\lambda + 14}{3\lambda^2 + 7}$$

Сега ги множиме двете страни со λ и добиваме:

$$n\lambda = m = -\frac{12\lambda^2 + 14\lambda}{3\lambda^2 + 7}$$

Заменуваме и добиваме:

$$a = a_0 + m = 2 - \frac{12\lambda^2 + 14\lambda}{3\lambda^2 + 7}$$

$$b = b_0 + n = 1 - \frac{12\lambda + 14}{3\lambda^2 + 7}$$

Ги множиме двете страни на равенката со z^2 и добиваме:

$$3(\underbrace{az}_{x})^2 + 7(\underbrace{bz}_{y})^2 = 19z^2$$

Па како решение се јавува подредената тројка:

$$(x, y, z) = \left(2z - \frac{12z\lambda^2 + 14z\lambda}{3\lambda^2 + 7}, z - \frac{12z\lambda + 14z}{3\lambda^2 + 7}, z\right); \lambda, z \in \mathbb{Q}$$

Ова решение се базира на фактот дека ако една права со пад λ ја сече елипсата/кругот во една точка со рационални координати, тогаш и другата нивна пресечна точка ќе има рационални координати.