Нека a, b, c се позитивни реални броеви за кои важи $ab + bc + ca = 6abc$. Докажи дека важи неравенството:

$$a + b + c \geq 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)$$

Кога важи равенство?

Неравенството, т.е. десната страна можеме да ја трансформираме во:

$$a + b + c \geq 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)$$

$$\iff a + b + c \geq 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{abc}\right)$$

$$\iff a + b + c \geq 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{\frac{ab+bc+ca}{6}}\right) = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{6(a^2b + b^2c + c^2a)}{ab + bc + ca}\right)$$

$$\iff a + b + c \geq 1 + \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{ab + bc + ca}$$

$$\iff a + b + c \geq \frac{ab + bc + ca + a^2b + b^2c + c^2a}{ab + bc + ca}$$

$$\iff (a + b + c)(ab + bc + ca) \geq ab + bc + ca + a^2b + b^2c + c^2a$$

$$\iff a^2b + b^2a + cab + bca + b^2c + c^2b + ca^2 + cab + c^2a \geq ab + bc + ca + a^2b + b^2c + c^2a$$

$$\iff b^2a + c^2b + ca^2 + 3abc \geq ab + bc + ca = 6abc$$

$$\iff b^2a + c^2b + ca^2 \geq 3abc$$

Што е точно од AM-GM, па одтука и доказот.

Од својствата на AM-GM следува дека равенството важи кога сите членови се еднакви, т.е.

$b^2a = c^2b \implies ab = c^2 \implies abc = c^3$

$a^2c = b^2a \implies ac = b^2 \implies abc = b^3$

$c^2b = a^2b \implies cb = a^2 \implies abc = a^3$

Со израмнување добиваме дека равенство важи кога $a^3 = b^3 = c^3 \implies a = b = c$.

Заменуваме во условот и добиваме:

$$a^2 + a^2 + a^2 = 6a^3$$

$$3a^2 = 6a^3$$

$$1 = 2a \implies a = \frac{1}{2}$$

Па следи дека равенството важи кога: $a = b = c = \frac{1}{2}$

Најпрво ќе ги воведеме поимите “отворена колона“, кога жетоните можат да се движат во било која насока и “затворена колона“ кога жетоните можат да се движат само наназад. Црниот може да победи се додека бројот на затворени колони после неговиот потег е парен број, без разлика како одиграл белиот. Затоа што тогаш доколку белиот при својот потег ја затвори колоната, тогаш ќе имаме непарен број на затворени колони. А победник во играта е оној кој што ќе ја затвори последната колона, односно оној после чиј потег ќе имаме 0 отворени колони. А бидејќи почетниот број на отворени колони е 8, односно парен број, доколку после потегот на црниот имаме парен број отворени/затворени колони, тогаш белиот не би можел во никој случај да има парен број на затворени колони, доколку тој при неговиот потег затворил колона, па така никогаш неможе да за затвори последната колона, односно неможи да добие 0 отворени колони.

Сега ќе докажеме дека оној после чиј потег има 0 отворени колони е победник. Доколку тоа го направи црниот, тогаш во наредниот потег, доколку играта не е завршена, белиот би морал да се движи наназад, отварајќи една колона, но доколку црниот веднаш ја затвори колоната мора да победи, бидејќи белиот неможе бесконечно да се движи наназад.

Победничката стратегија на црниот е така што тој не затвора колона се додека белиот не го направи тоа пред него. Така доколку во некој потег белиот затвори колона, тоа го прави и црниот. Доколку после својот потег белиот не затвори колона, тогаш црниот во наредниот потег треба да го мрдне својот жетон во истата колона, така што помеѓу двата жетони од иста колона ќе има едно празно поле. Но доколку тоа го направи белиот, односно доколку после неговиот потег меѓу двата жетони има само едно празно поле, тогаш црниот треба да го направи истото но во друга колона, што е секако возможно затоа што имаме парен број на колони на почетокот од играта.

Кога ќе се достигне бројот на 0 отворени колони и белиот ќе биде приморан да се враќа и да отвора колони, се што треба да направи црниот за да победи е да ја затвора онаа колона, која што белиот ја отвара.

Најди ги сите фунцкии $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, така што:

$$f((x+y)^2) = (x+y)(f(x)+f(y))$$

Најпрво нека: $y = -x$, па добиваме:

$$f(0) = 0$$

Сега нека: $y = 0$, па имаме:

$$f(x^2) = xf(x) \tag{1}$$

Па така имаме:

$$f((x+y)^2) = (x+y)f(x+y)$$

Заменуваме во дадениот услов, па имаме:

$$(x+y)f(x+y) = (x+y)(f(x)+f(y))$$

Случај 1: $y = -x$

Тогаш добиваме со замена $0 = 0$, па решенија се сите фунцкии за кои важи $f(0) = 0$

Случај 2: $y \neq -x$

Тогаш добиваме:

$$(x+y)f(x+y) = (x+y)(f(x)+f(y)) \iff f(x+y) = f(x)+f(y) \tag{2}$$

Од (1) и (2), добиваме дека f е линеарно пресликување, бидејќи пресликувањето f зачувува множење со скалар и собирање на вектори, па така f е од формата $f(x) = ax + c$

Така за условот сега имаме:

$$(x+y)f(x+y)=(x+y)(f(x)+f(y)) \iff f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{2}$$

Од (1) и (2), добиваме дека f е линеарно пресликување, бидејќи пресликувањето f зачувува множење со скалар и собирање на вектори, па така f е од формата $f(x)=ax+c$

Така за условот сега имаме:

$$a(x+y)^2+c=(x+y)(ax+ay+2c)$$

$$\iff ax^2+2axy+ay^2+c=ax^2+2axy+2cx+ay^2+2xy$$

$$\iff c=2c(x+y)$$

Ако $c \neq 0$, тогаш добиваме $x+y=\frac{1}{2}$, што ја прекршува општоста на x и y. Па од ова добиваме $c=0$. Добиваме $f(x)=ax$. Повторно проверуваме и имаме:

$$a(x+y)^2=(x+y)a(x+y)=a(x+y)^2$$

Од ова следува дека условот важи $\forall a \in \mathbb{R}$. Па решение е:

$$f(x)=ax; \forall a \in \mathbb{R}$$

Поради општоста на x и y го бараме пресекот на двата случаи, а тоа се фунциите од видот:

$$f(x)=ax; \forall a \in \mathbb{R}$$

Што се воедно и решенија на фунцкионалната равенка.