① Услов: $ab+bc+ca=6abc$, $a,b,c \in \mathbb{R}^+$

Докажи дека: $a+b+c \geq 1+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)$.

Од услов $\Rightarrow ab+bc+ca=6abc$ и $a,b,c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow abc \neq 0$ па

$ab+bc+ca=6abc \;/ :(abc)$

$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=6$ т.е.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$

Сега имаме:

$$6(a+b+c)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=$$

$$=3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \underset{Am-Gm}{\geq}$$

$$\geq 3+3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)=$$

$$=3+3\sqrt[3]{\frac{abc}{abc}}+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)=$$

$$=3+3\sqrt[3]{1}+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)=$$

$$=3+3+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)=$$

$$=6+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)$$

односно $6(a+b+c) \geq 6+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \;/ :6$

$\Rightarrow (a+b+c) \geq 1+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)$

што и требаше да се докаже.

Равенство важи кога $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$ и $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$ т.е

кога $a=b=c=\frac{1}{2}$.

② $(a,b,c)=?$ т.ш. $a^3+b^3+c^3$ се дели со a^2b, b^2c и c^2a

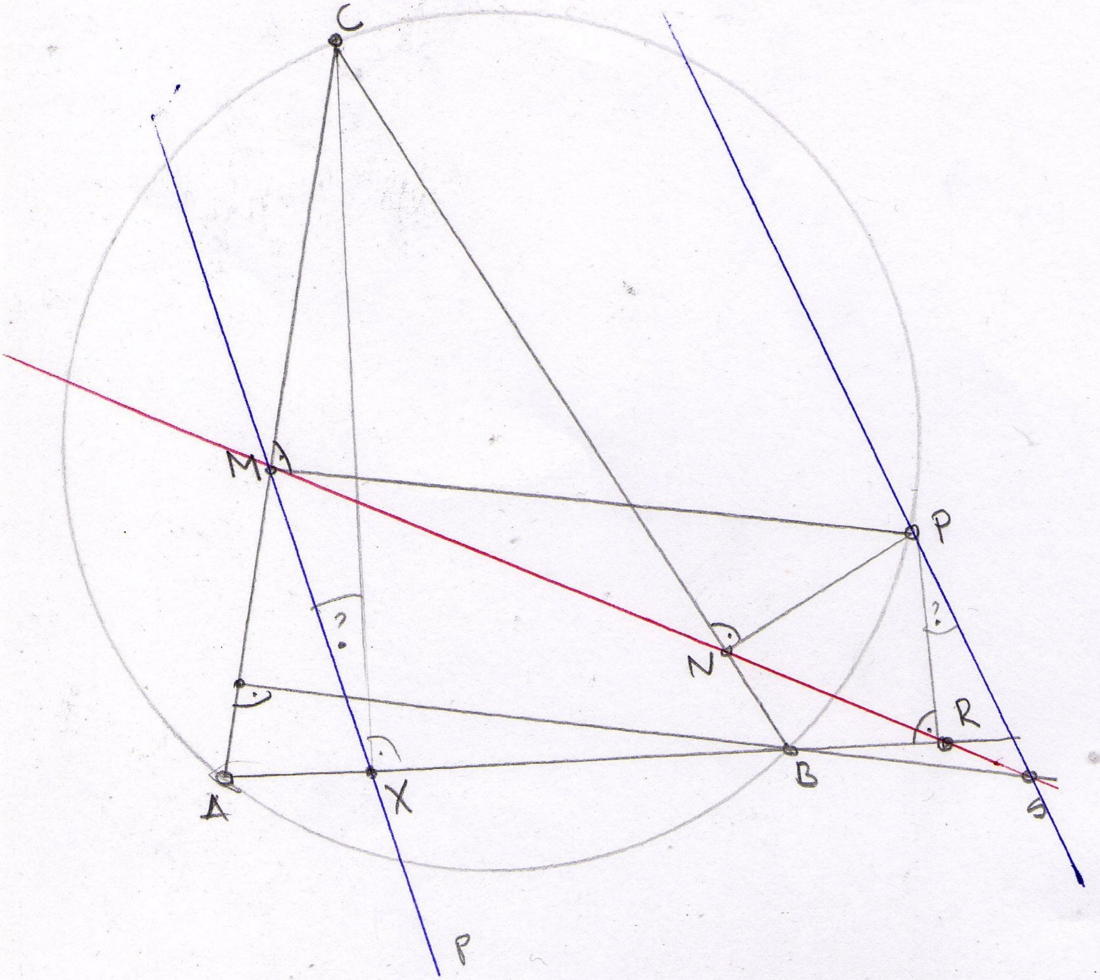
---

Нека НЗД$(a,b)=d$, тогаш $d|a$, $d|b$ па мора и $d|c$.
Според тоа, можеме да ги воведеме ознаките x,y,z, $x,y,z\in\mathbb{N}$ т.ш. $a=dx$, $b=dy$, $c=dz$ и притоа НЗД$(x,y,z)=1$ зашто во спротивно, НЗД$(a,b,c)\neq d$.
Сега имаме $a^2b=d^2x^2dy=d^3x^2y$, а од условот знаеме дека $a^2b\mid a^3+b^3+c^3$ т.е. $d^3x^2y\mid d^3x^3+d^3y^3+d^3z^3$ односно $x^2y\mid x^3+y^3+z^3$.
Аналогно и за другите случаи $\Rightarrow y^2z\mid x^3+y^3+z^3$ и $z^2x\mid x^3+y^3+z^3$
Значи $x^2\mid x^3+y^3+z^3$, $y^2\mid x^3+y^3z^3$ и $z^2\mid x^3+y^3+z^3$ и бидејќи НЗД$(x,y,z)=1 \Rightarrow x^2y^2z^2\mid x^3+y^3+z^3$
Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $x\geq y\geq z$. Значи важи неравенството $3x^3\geq x^3+y^3+z^3\geq x^2y^2z^2$ (затоа што $x^2y^2z^2\mid x^3+y^3+z^3$ па е $\leq x^3+y^3+z^3$). Од последното добиваме $x\geq\frac{y^2z^2}{3}$. Бидејќи $x^2\mid x^3+y^3+z^3$ и $x^2\mid x^3 \Rightarrow$
$x^2\mid y^3+z^3\leq 2y^3$; $2y^3\geq y^3+z^3\geq x^2$ т.е. $2y^3\geq\frac{y^4z^4}{9}$; $18\geq yz^4$
- Ако $z\geq 2 \Rightarrow 18\geq y\cdot 16$; $\frac{18}{16}\geq y$; $y<2$ т.е. $z>y$ што противречи на претпоставката $y\geq z$.
$\Rightarrow z<2$ и бидејќи $z\in\mathbb{N}\Rightarrow z=1$.

- Ако $y\geq 2\Rightarrow x\geq y$, НЗД$(x,y)=1$ па бидејќи $z=1$ и
$x^3\geq x^3+y^3+z^3\geq x^2y^2z^2$ т.е. бидејќи $x>y+2\Rightarrow$
$2x^3=x^3+x^3>x^3+(y+1)^3>x^3+y^3+1\geq x^2y^2 \Rightarrow x\geq\frac{y^2}{2}$
Бидејќи $y^3+z^3\geq x^2 \Rightarrow y^3+1\geq\frac{y^4}{4}\Rightarrow 4y^3+4\geq y^4$;
$4\geq y^4-4y^3$; $4\geq y^3(y-4)$; $\Rightarrow y\leq 4$. Со проверка за $y=2,3,4$ добиваме дека $y=2$ т.е. решенија на равенката се: (бидејќи $(x,y,z)=(1,1,1),(3,2,1)$)

$\boxed{(a,b,c)=(d,d,d),(3d,2d,d)}$

③



Ако R е подножјето на висината од P кон AB

од теоремата на Симсон => точките M, N и R е колинеарн

Претпоставка: Сите прави p минуваат низ подножјето X на висината од C кон AB.

Доколку докажеме дека $\angle MXC = \angle RPC$ доказот е завршен, т.е. дека $\triangle MCX \sim \triangle RSP$...

⑥ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f((x+y)^2) = (x+y)(f(x)+f(y))$

$x := y := 0 \Rightarrow f(0) = 0 \cdot (2f(0)) = 0 \quad \Rightarrow f(0) = 0$

$y := 0 \Rightarrow f((x+0)^2) = (x+0)(f(x)+f(0))$

$\Rightarrow f(x^2) = xf(x) \quad (*)$

$x := x+y \Rightarrow f((x+y)^2) = (x+y)f(x+y) = (x+y)(f(x)+f(y))$

$\Rightarrow f(x+y) = (f(x)+f(y)) \quad (x+y \neq 0).$

АКО ВО $(*)$ ЗАМЕНИМЕ $x: x+1 \Rightarrow$

$f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1)$

$f(x^2+2x+1) = (x+1)(f(x)+f(1))$

$\cancel{f(x^2)} + f(2x) + \cancel{f(1)} = \cancel{xf(x)} + xf(1) + f(x) + \cancel{f(1)}$

$\Rightarrow f(2x) = f(x+x) = f(x)+f(x) = 2f(x)$

$\Rightarrow 2f(x) = xf(1) + f(x) \ / -f(x)$

$\Rightarrow f(x) = xf(1)$

$f(1) = c$, НЕКОЈА КОНСТАНТА, $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = xc}, \ x \in \mathbb{R}, \ c \in \mathbb{R}$

Со проверка утврдуваме дека е точно.

$c(x+y)^2 = (x+y) \cdot c \cdot (x+y) = (x+y)(cx+cy) = c(x+y)^2.$