$ab+bc+ca=6abc$

$\boxed{\text{ЗАДАЧА 1}}$

$$a+b+c \geq 1+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)$$

$$\Longleftrightarrow a+b+c \geq \frac{6abc+a^2b+b^2c+c^2a}{6abc}$$

$$\Longleftrightarrow 6abc(a+b+c) \geq 6abc+a^2b+b^2c+c^2a$$

$$\Longleftrightarrow (ab+bc+ca)(a+b+c) \geq 6abc+a^2b+b^2c+c^2a$$

$$\Longleftrightarrow a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+3abc \geq 6abc+a^2b+b^2c+c^2a$$

$$\Longleftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \geq 3abc$$

Што е точно од аритметичка и геометриска средина со знак за равенство ако и само ако $ab^2=bc^2=ca^2$

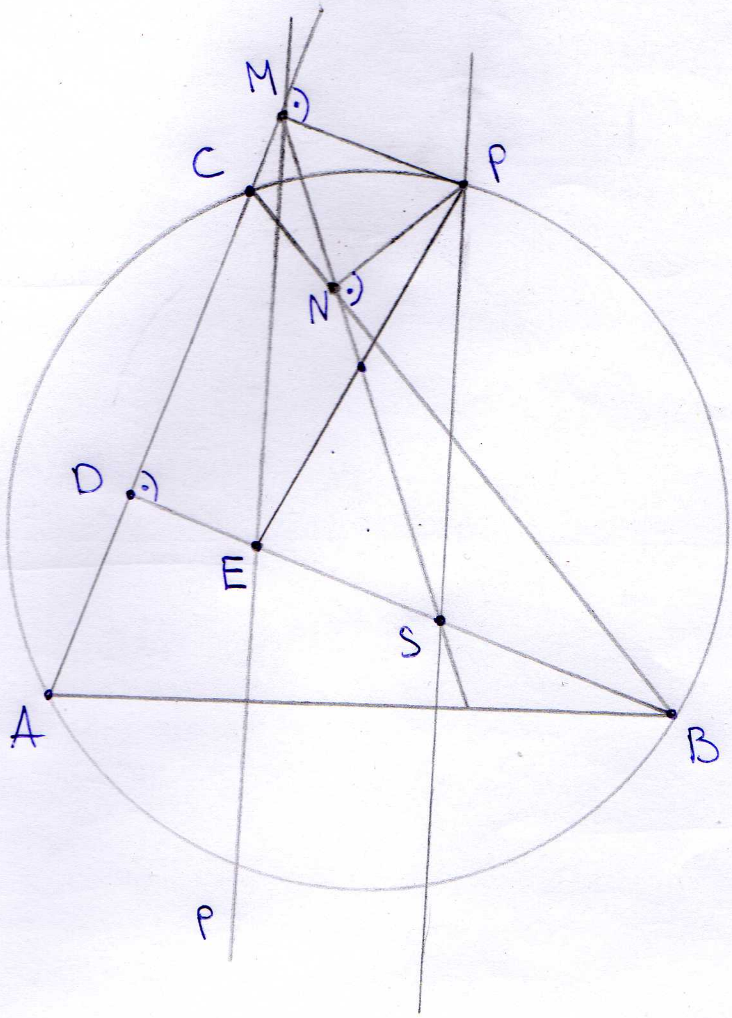
$$\Rightarrow a^2=bc, \quad b^2=ca, \quad c^2=ab$$

$$\Rightarrow a=b=c$$

Ако замениме во равенката добиваме $3a^2=6a^3$

$2a=1$, $\quad a=\frac{1}{2}$

ЗАДАЧА 3



Нека D е подножјето на висината од B.

Од $\measuredangle BDM = \measuredangle PMD = 90^\circ \Rightarrow \overline{BD} \parallel \overline{PM}$

Од условот $p \parallel \overline{PS}$ добиваме MPSE е паралелограм (каде E е пресек на p со $\overline{DB}$)

Правата $\overline{MN}$ е симсонова права на триаголникот $\triangle ABC$ и точката P. Од својство на симсоновата права ја дели отсечката $\overline{PH}$ на половина (H е ортоцентар на $\triangle ABC$), $H \in \overline{DB}$ и дијагоналите на паралелограмот се преполовуваат, добиваме дека $E = H$ односно правата p минува низ фиксна точка, ортоцентарот на $\triangle ABC$.

ЗАДАЧА 5

Црниот ќе победи ако успее да го доведе белиот во состојба така што не ќе може со ниеден жетон да оди напред, туку ќе мора да се враќа.
Тогаш црниот само го турка неговиот жетон до противничкиот во соодветната колона, сè додека на белиот му снемаат потези.
Црниот ќе го постигне тоа ако игра на следниот начин. По секој негов потег, на таблата да му останат парен број на жетони кај кои на полето пред нив нема бел жетон. На тој начин по одреден број чекори на црниот ќе му останат 0 жетони кај кои пред нив нема бел жетон, а тоа ќе важи и за белиот, кој е на потег, па ќе мора да врати некој жетон назад.
Црниот може да го постигне тоа бидејќи таблата има парен број на полиња, а тој игра втор.

$f((x+y)^2)=(x+y)(f(x)+f(y))$

Задача 6

1° $x=y=0$

$f(0)=0$

2° $y=0$

$f(x^2)=xf(x)$

3° $x=-x$ $y=0$

$f(x^2)=-xf(-x)$ $\Rightarrow$ $f(-x)=-f(x)$

Очигледни решенија се $f(x)=0$ и $f(x)=x$