$\frac{AS}{AR} = CN$

Решение 1

$ab+bc+ca = 6abc$

$a+b+c \geq 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)$

$\Leftrightarrow a+b+c \geq 1 + \frac{a^2b+b^2c+c^2a}{6abc}$

$\Leftrightarrow a+b+c \geq 1 + \frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab+bc+ca}$

$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)(a+b+c) \geq (ab+bc+ca) + a^2b+b^2c+c^2a$

$\Leftrightarrow \cancel{a^2b} + abc + a^2c + ab^2 + \cancel{b^2c} + abc + abc + bc^2 + \cancel{c^2a} \geq$

$\geq ab+bc+ca + \cancel{a^2b} + \cancel{b^2c} + \cancel{c^2a}$

$\Leftrightarrow 3abc + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 6abc$

$\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \geq 3abc$, што важи

од $AM \geq GM$

$\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc$

Р-во важи за $ab^2 = bc^2 = ca^2$

т.е. $ab = c^2,\ ca = b^2,\ bc = a^2$

т.е. $ab+bc+ca = a^2+b^2+c^2$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0$

$\Rightarrow a = b = c$, а од условот

$\Rightarrow \cancel{3}a^2 = 6a^3 \Rightarrow 1 = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2} = b = c$

Решение 2

Нека НЗД$(a,b)=d \Rightarrow d^3 \mid a^2b \mid a^3+b^3+c^3$

$\Rightarrow d \mid c.$ $\Rightarrow$ НЗД на било кои 2 е НЗД и на тројката

Нека $a=dl$, $b=dm$ и $c=dn$, тогаш и (l,m,n) е тројка која одговара на задачата со НЗД$(l,m,n)=1$.

Бидејќи l^2, m^2 и n^2 го делат $l^3+m^3+n^3$ и НЗД$(l^2,m^2,n^2)=1$

$$\Rightarrow l^2m^2n^2 \mid l^3+m^3+n^3$$

Б.Г.О $l \geq m \geq n$

$$\Rightarrow 3l^3 \geq l^3+m^3+n^3 \geq l^2m^2n^2 \Rightarrow l \geq \frac{m^2n^2}{3}$$

Од $l^2 \mid m^3+n^3$ (1)

$$\Rightarrow 2m^3 \geq m^3+n^3 \geq l^2 \geq \frac{m^4n^4}{9} \Rightarrow 2m^3 \geq \frac{m^4n^4}{9}$$

$$\Rightarrow 18 \geq mn^4 \geq n^5$$

$$\Rightarrow \boxed{n=1}$$

i) $m=1 \Rightarrow (l,m,n)=(1,1,1)$

ii) $m \geq 2 \Rightarrow l > m$, бидејќи НЗД$(l,m)=1$

$$\Rightarrow 2l^3 > l^3+m^3+1 \geq l^2m^2 \Rightarrow l > \frac{m^2}{2}$$

$$(1) \Rightarrow m^3+1 \geq l^2 > \frac{m^4}{4}$$

$$\Rightarrow 4m^3+4 > m^4, \quad 4 > m^4-4m^3 = m^3(m-4)$$

За $m \geq 5$, не важи $\Rightarrow$ $\cancel{4<m}$ $4 \geq m$

А) $m=4 \Rightarrow 65 \geq l^2 \Rightarrow 8 \geq l$, со проверка нема решение (не исполнува)

Б) $m=3 \Rightarrow 28 \geq l^2 \Rightarrow 5 \geq l$, со проверка нема решение (не исполнува)

В) $m=2 \Rightarrow 9 \geq l^2 \Rightarrow 3 \geq l$

За $l=3$ има решение, другите не исполнуваат

$\Rightarrow (l,m,n)=(3,2,1)$

$\Rightarrow (a,b,c) \in \{(d,d,d),(3d,2d,d)\}$ и нивни пермутации

РЕШЕНИЕ 3

Нека нормалата спуштена од P кон AB, ја сече AB во точка Q. Тогаш $M-N-S-Q$ се колинеарни бидејќи $S \in MN$ и $M-N-Q$ ја образуваат Симсонова та линија. Правата p, низ M нека ја сече AB во V. Треба да докажеме дека $\measuredangle CVA = 90°$ или дека $BB_1 \cap CV = \{H\}$ – ортоцентар и оттаму што p ќе минува низ фиксна точка независна од P.

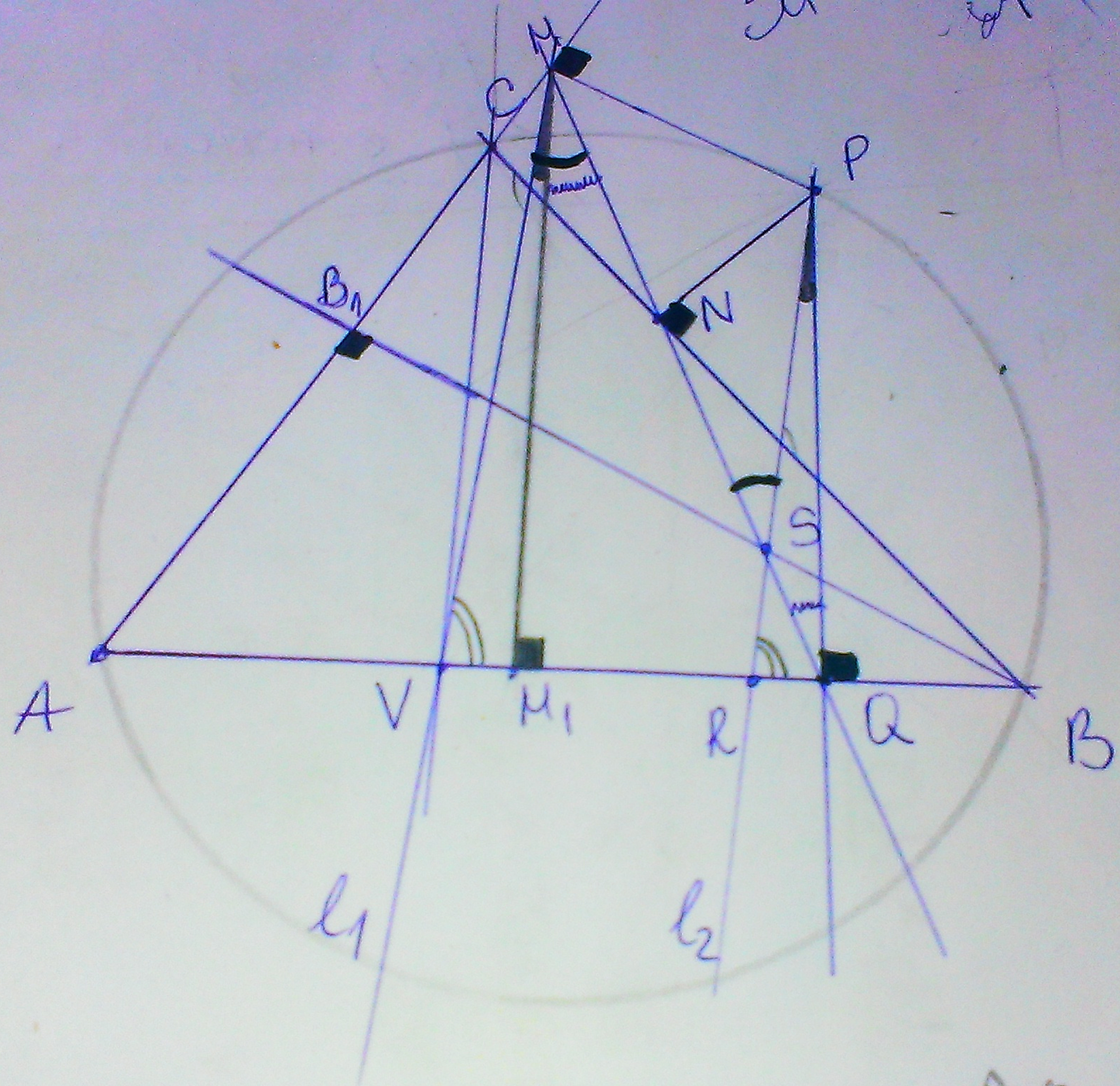
Ако $MM_1 \parallel PQ \Rightarrow MM_1 \perp AB$ и $\measuredangle AM_1M = 90°$

$\triangle VM_1M \sim \triangle RQP$ $(PS \parallel p$ и $PQ \parallel MM_1)$

$\Rightarrow \measuredangle RPQ = \measuredangle VMM_1$ и $\measuredangle PRQ = \measuredangle MVM_1$. Според ова доволно е да се докаже дека $\measuredangle CVM = \measuredangle MVM_1$ бидејќи тогаш $CV \parallel MM_1$ па $\measuredangle CVA = 90°$

$\measuredangle MSP = \measuredangle VMQ$ како агли на трансверзала и

$\measuredangle PQS = \measuredangle M_1MQ$ $(-\parallel-)$


M
C
P
B_1
N
S
A
V
M_1
R
Q
B
l_1
l_2

РЕШЕНИЕ 4

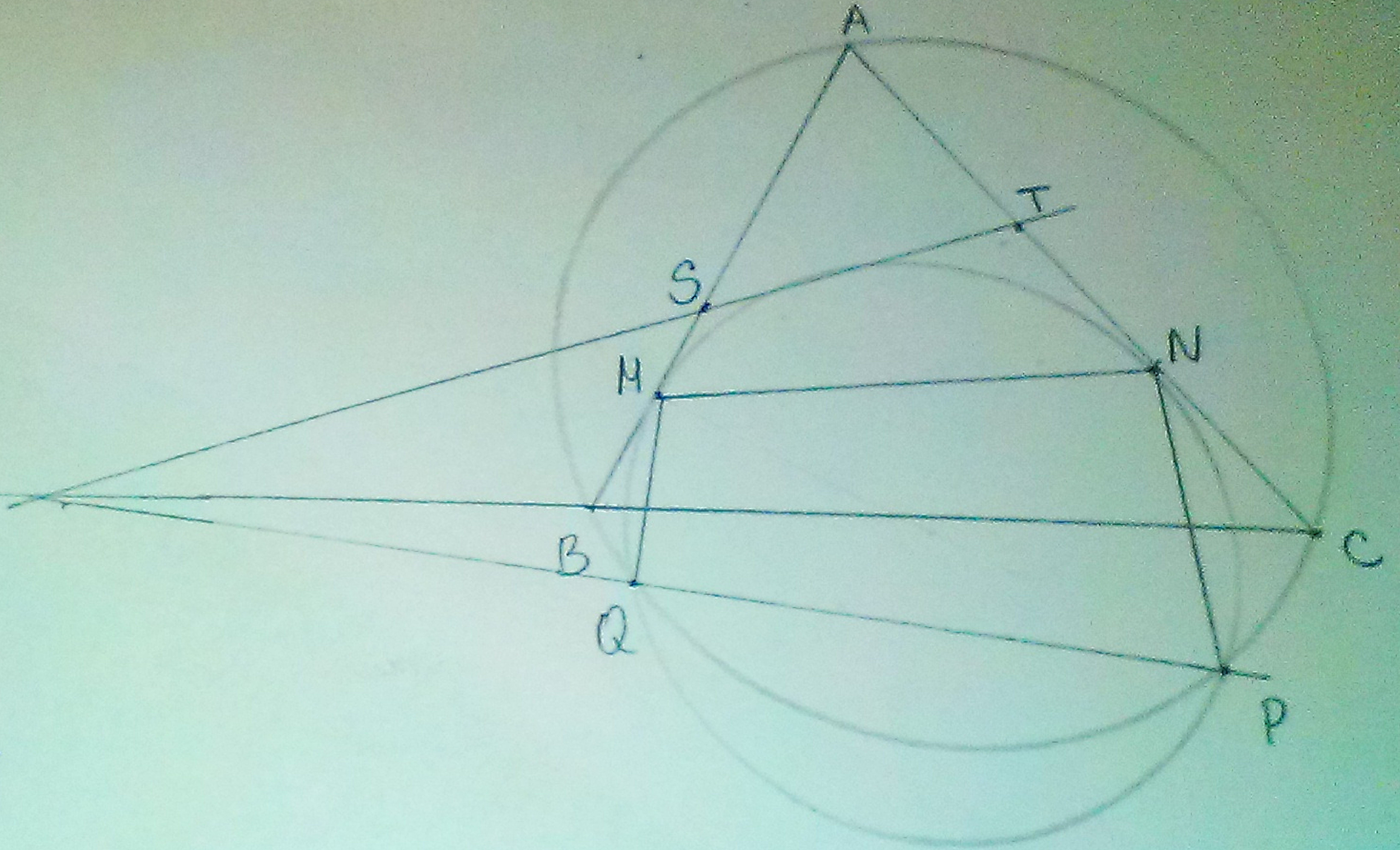
$\overline{AM} = \overline{AN}$ како тангентни отсечки $\Rightarrow \measuredangle AMN = \measuredangle ANM$

Нека $\frac{\overline{AS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{BM}+\overline{CN}}$, $\frac{\overline{AT}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BM}+\overline{CN}}$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BM}+\overline{CN}}{\overline{CN}}$$

$$\frac{\overline{AS}+\overline{SB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BM}+\overline{CN}}{\overline{CN}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{SB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CN}}$$



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{BM}+\overline{CN}}{\overline{BM}}$$

$$\frac{\overline{AT}+\overline{TC}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{BM}+\overline{CN}}{\overline{BM}}$$

$$\Rightarrow \cancel{1}+\frac{\overline{TC}}{\overline{AT}} = \cancel{1}+\frac{\overline{CN}}{\overline{BM}}$$

$\measuredangle PNC = \measuredangle PMN$ (агол меѓу тангента и тетива)

$\measuredangle BMQ = \measuredangle MNQ$ (-||-)

Нека $ST \cap BC = \{X\}$ и $BC \cap QP = \{Y\}$

$T: X \equiv Y$

Од степен за точка за $Y \Rightarrow \overline{YB} \cdot \overline{YC} = \overline{YQ} \cdot \overline{YP}$

Со Менелај за $\triangle AST$ и правата $C-B-X$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BS} \cdot \frac{SX}{XT} \cdot \frac{TC}{CA} = 1 \quad (1)$$

Со Менелај за $\triangle XBS$ и $AC \Rightarrow \frac{XC}{CB} \cdot \frac{BA}{AS} \cdot \frac{ST}{TX} = 1 \quad (2)$

За $\triangle ABC$ и $X-S-T$

$$\frac{AS}{SB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CT}{TA} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CN}}{\overline{BN}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{BN}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\overline{CN}^2}{\overline{BN}^2} = \frac{\overline{XC}}{\overline{BX}}}$$

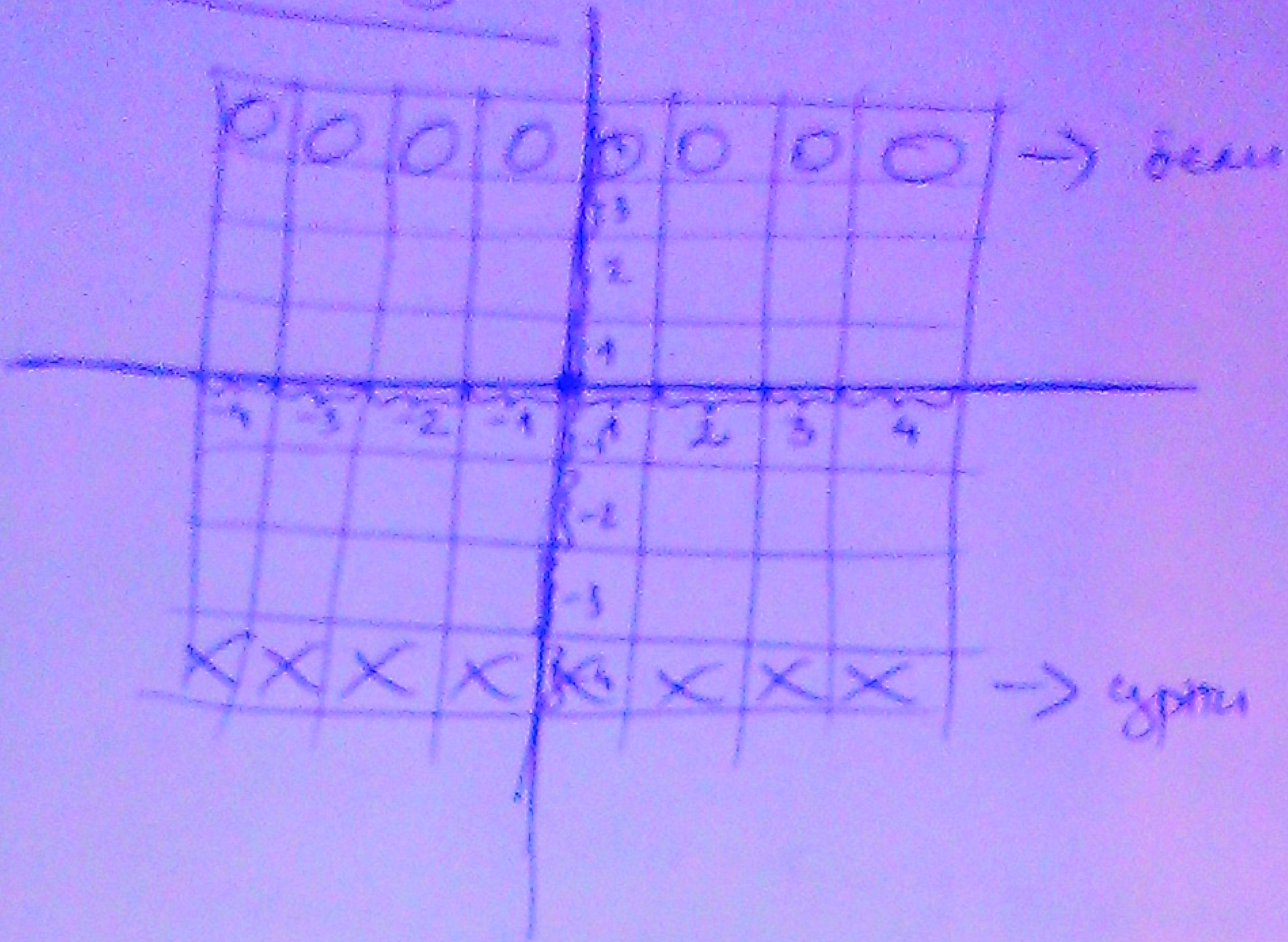
$$\Rightarrow \frac{(1)}{(2)} = \frac{\dfrac{\cancel{\overline{AB}} \cdot \overline{SX} \cdot \overline{TC}}{\overline{BS} \cdot \cancel{\overline{XT}} \cdot \overline{CA}}}{\dfrac{\overline{XC} \cdot \cancel{\overline{BA}} \cdot \overline{ST}}{\overline{BC} \cdot \overline{AS} \cdot \cancel{\overline{XT}}}} = \frac{\overline{AS} \cdot \overline{SX} \cdot \overline{TC} \cdot \overline{CB}}{\overline{BS} \cdot \overline{ST} \cdot \overline{XC} \cdot \overline{CA}}$$

$$= \frac{\overline{TA} \cdot \cancel{\overline{XC}}}{\overline{BX} \cdot \cancel{\overline{CT}}} \cdot \frac{\overline{SX} \cdot \cancel{\overline{TC}} \cdot \overline{CB}}{\overline{ST} \cdot \cancel{\overline{XC}} \cdot \overline{CA}} = \frac{\overline{TA} \cdot \overline{SX} \cdot \overline{CB}}{\overline{TS} \cdot \overline{BX} \cdot \overline{CA}}$$

Решение 2

Нека НЗД(a,b) = d ...

Решение 5



Црниот игра централно симетрично во однос на центарот на таблата и потезите на белиот. Според тоа за секој потег на белиот црниот има свој потег и на крајот ќе победи.

Пример белиот става бел жетон на $(-2,2)$ координата тогаш црниот на $(2,-2)$.

(Притоа едно квадратче означува еден број од x, y - оските)

$\Rightarrow$ 11 434 $(a,b)=d \Rightarrow$ 131 ..

Решение 6

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f((x+y)^2) = (x+y)(f(x)+f(y))$

$x=y=0 \Rightarrow \boxed{f(0)=0}$

$x=x,\ y=0 \Rightarrow f(x^2) = xf(x) \ \ldots \ (1)$

$\Rightarrow f((x+y)^2) = (x+y)f(x+y)$ (за $x=x+y$)

по $(x+y)(f(x)+f(y)) = f((x+y)^2) = (x+y)f(x+y)$

$\Rightarrow x+y \neq 0$ бидејќи x и y е било кој $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x+y) = f(x)+f(y) \Rightarrow f$ е адитивна

Во (1) за $x=x+1$

$\Rightarrow f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1)$

$\Rightarrow f(x^2+2x+1) = (x+1)(f(x)+f(1))$

$\Rightarrow \cancel{f(x^2)} + f(2x) + \cancel{f(1)} = \cancel{xf(x)} + f(x) + xf(1) + \cancel{f(1)}$

$f(2x) = f(x+x) = f(x)+f(x) = 2f(x)$

$\Rightarrow 2f(x) = f(x) + xf(1)$

$\Rightarrow f(x) = xf(1)$

За $f(1) = const = c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = xc,\ \forall x \in \mathbb{R}}$

Проверка:

$(x+y)^2 \cdot c = (x+y)(cx+cy) = c(x+y)^2$,

штд.