(1) $ab+bc+ac=6abc$ $\qquad a+b+c \geq 1+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)$

$$a+b+c=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ac)}{ab+bc+ac}=\frac{a^2b+b^2a+c^2a+ca^2+b^2c+bc^2+3abc}{ab+bc+ac}$$

Аритметичка – Геометријска средина

$$\Downarrow$$

$$b^2a+ca^2+bc^2 \geq 3abc$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(a^2b+c^2a+b^2c)+(ab^2+ca^2+bc^2)+3abc}{ab+bc+ac} \geq \frac{ab^2+ca^2+bc^2+6abc}{6abc}$$

$(ab+bc+ac=6abc)$

$$\frac{ab^2+ca^2+bc^2+6abc}{6abc}=1+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$a+b+c \geq 1+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)$$

② $a^2b,\ b^2c,\ c^2a \mid a^3+b^3+c^3$ $\quad a, b, c = ?$ СТРАНА 1

Нека НЗД $(a,b)=k$.

$$\left.\begin{array}{l} k^3 \mid a^2b \mid a^3+b^3+c^3 \\ k^3 \mid a^3 \\ k^3 \mid b^3 \end{array}\right\} \Rightarrow k^3 \mid c^3 \Rightarrow k \mid c$$

Слично, се добива дека НЗД на било која двојка е НЗД на сите три броја.

Нека $a_1 = \frac{a}{k}$, $b_1 = \frac{b}{k}$, $c_1 = \frac{c}{k}$, НЗД $(a_1, b_1, c_1) = 1$ и (a_1, b_1, c_1) го задоволува условот на задачата.

Б.Г.Н.О може да претпоставиме $a_1 \ge b_1 \ge c_1$

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2 \mid a_1^2 b \mid a_1^3+b_1^3+c_1^3 \\ b_1^2 \mid b_1^2 c \mid a_1^3+b_1^3+c_1^3 \\ c_1^2 \mid c_1^2 a \mid a_1^3+b_1^3+c_1^3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1^2 b_1^2 c_1^2 \mid a_1^3+b_1^3+c_1^3$$

$$a_1^3+b_1^3+c_1^3 \ge a_1^2 b_1^2 c_1^2 \quad ①$$

$$3a_1^3 \ge a_1^3+b_1^3+c_1^3 \ge a_1^2 b_1^2 c_1^2 \Rightarrow 3a_1 \ge b_1^2 c_1^2 \quad a_1 \ge \frac{b_1^2 c_1^2}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2 \mid a_1^2 b \mid a_1^3+b_1^3+c_1^3 \\ a_1^2 \mid a_1^3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1^2 \mid b_1^3+c_1^3 \Rightarrow b_1^3+c_1^3 \ge a_1^2$$

$$2b_1^3 \ge b_1^3+c_1^3 \ge a_1^2 \Rightarrow 2b_1^3 \ge a_1^2 \quad ②$$

Од 1 и 2 $\Rightarrow$ $2b_1^3 \ge \frac{b_1^4 c_1^4}{9} \iff 18 \ge b_1 c_1^4$

② Ако $c_1 \geq 2$, $b_1 c^4 \geq 2^5 > 18$, што е контрадикција

Значи $c_1 = 1$.

$$a_1^2 b_1^2 \mid a_1^3 + b_1^3 + 1 \Rightarrow a_1^3 + b_1^3 + 1 \geq a_1^2 b_1^2$$

$$2a_1^3 > a_1^3 + b_1^3 + 1 \geq a_1^2 b_1^2 \Rightarrow a_1 \geq \frac{b_1^2}{2} \quad (3)$$

$$a_1^2 \mid b_1^3 + 1 \Rightarrow b_1^3 + 1 \geq a_1^2 \quad (4)$$

Од 3 и 4 $\Rightarrow$ $b_1^3 + 1 \geq \frac{b_1^4}{4} \Leftrightarrow b_1^3(b_1 - 4) \leq 4 \Rightarrow b_1 \leq 4$

(i) $b_1 = 1$ $\quad a_1^2 \mid 2 \Rightarrow a_1 = 1$ $\quad (a_1, b_1, c_1) = (1, 1, 1)$

(ii) $b_1 = 2$ $\quad a_1^2 \mid 9 \Rightarrow a_1 = 3$ $\quad (a_1, b_1, c_1) = (1, 2, 3)$

(iii) $b_1 = 3$ $\quad a_1^2 \mid 28$, нема решение

(iv) $b_1 = 4$ $\quad a_1^2 \mid 65$, нема решение

$a = a_1 \cdot k$, $b = b_1 \cdot k$, $c = c_1 \cdot k$

Решенијата ~~на равен~~ се:

(k, k, k); $(k, 2k, 3k)$; $(k, 3k, 2k)$; $(2k, k, 3k)$; $(2k, 3k, k)$;

$(3k, k, 2k)$; $(3k, 2k, k)$

(3) Ќе разгледаме 3 случаи: ~~СТРАНА~~ 1

1) $P \equiv B$ $(D \in AC)$

Нека $BD \perp AC \Rightarrow M \equiv D$, $N \equiv B$

Правата паралелна на MN низ M е самата MN, односно BD, која како висина е фиксна.

2) $P \equiv C$

Сега имаме $M, N \equiv C$ и правата низ M поминува низ C, која е фиксна точка $(C \equiv M)$

3) $P \not\equiv C$ и $P \not\equiv B$

Нека $D \in AC$, $BD \perp AC$ и $MN \cap AB = \{Q\}$

Q лежи на Симсонова права $\Rightarrow PQ \perp AB$

Ги имаме тетивните четириаголници: AQPM, QNPB, ABPC, CNPM.

$\square CNPM \Rightarrow \measuredangle NPM = 180 - \measuredangle MCN = \measuredangle ACB$ - фиксен

$\square NQBP \Rightarrow \measuredangle NPQ = \measuredangle NBQ = \measuredangle CBA$ - фиксен

MN и NQ се фиксни (како тетиви над $\measuredangle NPM$ и $\measuredangle NPQ$, соодветно)

$MQ = MN + NQ$ - фиксна

Нека правата паралелна на PS низ M е p.

$p \in BD = \{X\}$

$$\left.\begin{matrix} MP \perp OM \\ SO \perp OM \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} MP \parallel SX \\ MX \parallel PS \end{matrix}\right\} \Rightarrow MXSP \text{ е паралелограм}$$

$MP = SX$ $MX = SP$

5.

Се додека има колони во коишто не е направен ниеден потег, секој од двајцата играчи всушност има две опции: да го премести жетонот во претпоследното поле од колоната (во којашто не е направен ниеден потег)- целосно блокирајки го противничкиот жетон, или да премести жетон во било која позиција освен претпоследната во неговата колона. Со А ке го означиме бројот на колони во коишто е направен потег, но ниеден од двата жетона не е целосно блокиран. Ќе докажеме дека црниот играч секогаш може да се погрижи, бројот А откако ке биде одигран потег на секоја колона да биде парен. На почеток А=0. Ако некој играч целосно го блокира противничкиот жетон во колона во којашто претходно не е направен потег, А не се менува. Ако во колона во којашто и двата жетона се на почетните места, некој играч си го помести жетонот без целосно да го блокира противничкиот жетон, А се зголемува за 1. Ако во колона во којашто е напревен потег, но ниеден жетон не е целосно блокиран, некој играч реши целосно да го блокира противничкиот жетон, А се намалува за 1. Црниот играч треба само да внимава А да остане парен (ако белиот играч го зголеми за 1, црниот играч треба да направи соодветен потег со што ке го намали/зголеми за 1, ако белиот направи потег со кој А останува ист, и црниот треба да направи потег што не го менува А инт.) Бидејки црниот играч е втор, тој секогаш ке може на овој начин да го направи бројот А парен. Според ова, бројот А ќе биде парен на првиот потег откако во секоја колона ќе биде изигран барем по еден потег. Сега, на ред е белиот. Бидејки А е парен и поради горната стратегија, бројот на колони во коишто бел жетон не е помрднат е ист со бројот на колони во коишто црн жетон не е помрднат. Поради ова, за секој потег на белиот, црниот може да го направи истиот во друга колона(ако белиот го премести жетонот до полето до црниот жетон, црниот во друга соодветна колона ќе го премести својот жетон во полето до белиот, ако белиот го премести жетонот во било кое поле освен тоа до црниот, црниот ќе го направи истото) . Правејки така, после одреден број на потези белиот нема да може да мрдне ниеден од жетоните напред, принудувајки го да го помрдне назад. Сега, црниот ке го доближи жетонот во истата колона во полето до белиот жетон и после конечен број вакви потези, сите жетони на белиот ке бидат целосно блокирани, со што црниот победува.

$f: R \to R \qquad f((x+y)^2) = (x+y)(f(x)+f(y))$

$\boxed{f(x)=0}$ е решение на равенката. Нека $f(x) \neq 0$.

Заменувајќи $x=y=0 \Rightarrow \boxed{f(0)=0}$

Заменувајќи $y=0 \Rightarrow f(x^2) = xf(x)$

Заменувајќи во равенката

$f(x^2) = xf(x) \Rightarrow f((x+y)^2) = f(x+y)\cdot(x+y)$

$\Downarrow$

$f(x+y)\cancel{(x+y)} = \cancel{(x+y)}(f(x)+f(y))$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$\Downarrow$

$f((x+1)^2) = f(x^2+2x+1) = f(x^2) + f(2x) + f(1)$

$f(x^2) = xf(x) \Rightarrow f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1) = (x+1)(f(x)+f(1)) =$

$= xf(x) + xf(1) + f(x) + f(1)$

Изедначувајќи ги двете еднаквости добиваме

$f(x^2) + f(2x) + \cancel{f(1)} = xf(x) + xf(1) + f(x) + \cancel{f(1)}$

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l} f(x^2) = xf(x) \\ f(2x) = f(x+x) = 2f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f(x) = xf(1)}$

Равенката има 2 решенија:

$f(x) = 0$,

$f(x) = xf(1)$.