6. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f((x+y)^2) = (f(x)+f(y))(x+y)$

За $x=-y$, $f(0)=0$, за $y=0$, $f(x^2)=xf(x)$. За $x=-y$

$0=f(0)=(f(y)+f(-y))\cdot 0=0$, па Нека $x+y\neq 0$. Од $f(x^2)=xf(x)$

ако за x ставиме $x+y$, $f((x+y)^2)=(x+y)f(x+y)=(f(x)+f(y))(x+y)$

(услов) и $x+y\neq 0$, па $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Ако ставиме $x+1$

кај $f(x^2)=xf(x)$

$$f(x^2+2x+1)=(x+1)f(x+1)=xf(x+1)+f(x+1)=xf(x)+xf(1)+f(x)+f(1)=$$

$$=f(x^2)+xf(1)+f(x)+f(1)$$, а $f(x^2+2x+1)=f(x^2+2x)+f(1)=f(x^2)+f(2x)+f(1)$

па добиваме $f(x^2)+f(x)+f(x)+f(1)=f(x^2)+xf(1)+f(x)+f(1)$, т.е.

$f(x)=xf(1)=xc$, па решенија се $f(x)=0$ и $f(x)=xc$

7. $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ $ab+bc+ac=6abc$

$$a+b+c\ge 1+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \Big/ \cdot 6abc$$

$\Leftrightarrow 6abc(a+b+c)\ge 6abc+a^2b+b^2c+c^2a$

$\Leftrightarrow (ab+bc+ac)(a+b+c)\ge 6abc+a^2b+b^2c+c^2a$

$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+3abc\ge 6abc+a^2b+b^2c+c^2a$

$\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2\ge 3abc$, што е точно од AM-GM, $ab^2+bc^2+ca^2\ge 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=3abc$. Равенство важи за $a=b=c=\frac{1}{2}$.

2. Поради симетричноста, Б.Г.О. $c \geq b \geq a$. Ќе разгледаме 2 случаи:

I НЗД$(a,b,c)=1$. Ако НЗД$(a,b)=d \Rightarrow d \mid a^2b \mid a^3+b^3+c^3 \Rightarrow d \mid c$, контрадикција со НЗД$(a,b,c)=1$. Значи и НЗД$(a,b)=$НЗД$(b,c)=$НЗД$(c,a)=1$, па следи дека $a^2b^2c^2 \mid a^3+b^3+c^3$. Тогаш $a^2b^2c^2 \leq a^3+b^3+c^3 \leq 3c^3 \Rightarrow c \geq \frac{a^2b^2}{3}$

Сега од $a^2b^2c^2 \mid a^3+b^3+c^3$ и НЗД$(a^2,b^2,c^2)=1$, имаме $c^2 \mid a^3+b^3$, па $c^2 \leq a^3+b^3 \leq 2b^3$. Од друга страна $c^2 \geq \frac{a^4b^4}{9}$, па $18b^3 \geq a^4b^4 \geq a^5$, па мора $\boxed{a=1}$. За $b>1$, $c \geq b+1$, па

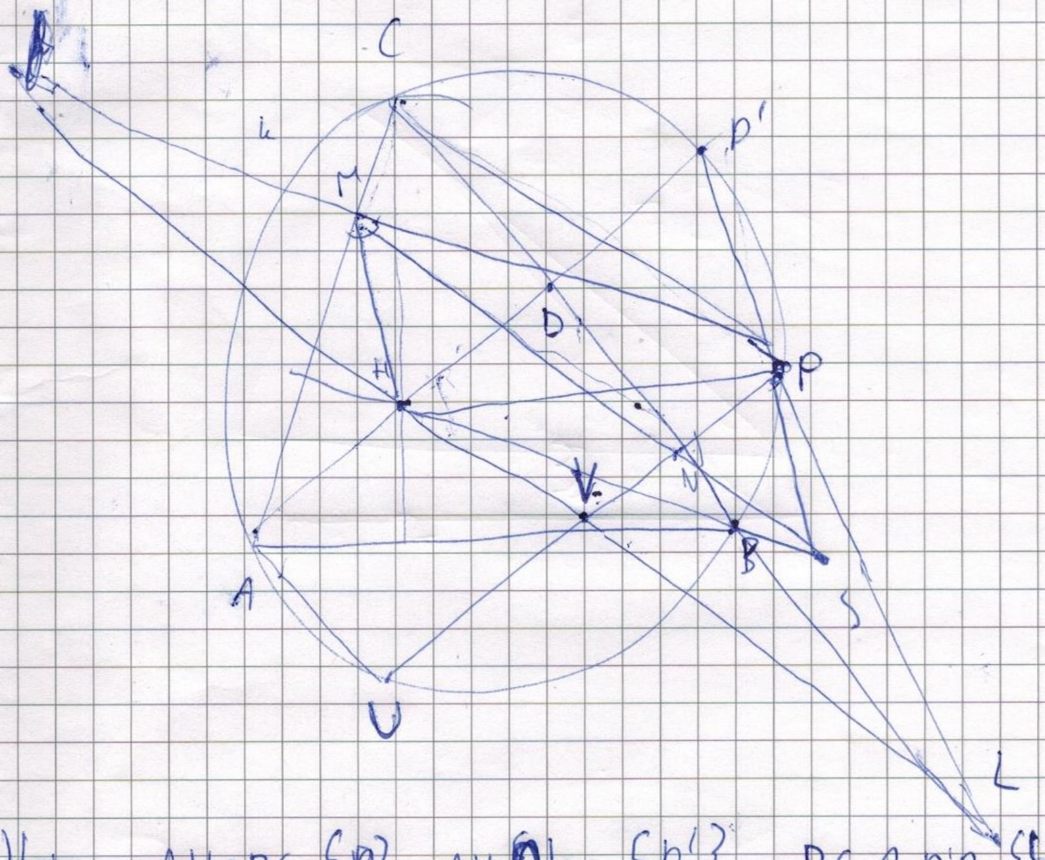
$2c^3 > c^3+b^3+1 = a^3+b^3+c^3 \geq b^2c^2$, од тука $c > \frac{b^2}{2}$. Но

$1+b^3 = a^3+b^3 > c^2 > \left(\frac{b^2}{2}\right)^2$ па $b \leq 4$. Сега лесно се добива дека $\boxed{b=2}$ и $\boxed{c=3}$. Ако $b=1$, јасно и $c=1$. Значи за НЗД$(a,b,c)=1$ решенија се $(a,b,c)=(1,1,1)$ и $(1,2,3)$

II Нека НЗД$(a,b,c)=d>1$. Тогаш $a=da_1$, $b=db_1$, $c=dc_1$, па условите се еквивалентни со

$d^2a_1^2 \cdot db_1 \mid d^3a_1^3+d^3b_1^3+d^3c_1^3$, ... (аналогно и другите) или $a_1^2b_1 \mid a_1^3+b_1^3+c_1^3$. Јасно НЗД$(a_1,b_1,c_1)=1$. Сега добивме идентичен случај како во I, па конечно решенија на задачата се $(a,b,c)=(x,x,x)$ и $(x,2x,3x)$.

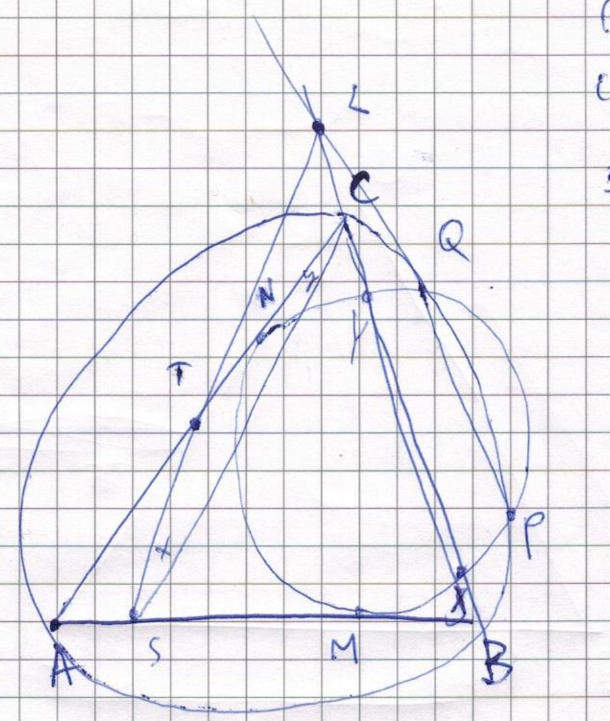
3. Лема: MN ја преполовува PH, каде H е ортоцентар.



Нека $AH \cap BC = \{D\}$, $AH \cap k = \{D'\}$, $BC \cap D'P = \{L\}$, $LH \cap PU = \{V\}$ а $PM \cap k = \{U\}$. Од тетивноста на AUCP и PCMN $\angle PUA = 180 - \angle PCA = \angle PNM$, па $AU \parallel MN$. Од $\overline{HD} = \overline{DD'}$ и $\overline{VN} = \overline{NP}$, $\triangle HLD'$ и $\triangle VLP$ се рамнокраки, $\angle UAD' = 180 - \angle UPD' = \angle VPL = \angle VHD'$, па $AU \parallel VH \parallel MN$. $VN = NP$ и $HV \parallel MN$ па MN е средна линија $\Rightarrow$ MN ја преполовува PH.

Сега јасно $SH \parallel PM$, PH и MS се преполовуваат, $p \parallel PS \Rightarrow$ p минува низ H, што е фиксна точка која не зависи од изборот на P.

4.



Условите се еквивалентни со:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} - 1 = \frac{\overline{BM}}{\overline{CN}}$$

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CN}} \quad и$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AT}} - 1 = \frac{\overline{CN}}{\overline{BM}}$$

$$\frac{\overline{TC}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{BM}}, \quad т.е.: \frac{\overline{BS}\cdot\overline{TC}}{\overline{AT}\cdot\overline{AS}} = 1.$$

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{CT}} \Big/ +1$$

$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{TC}}}$$

Нека PQ и BC се сечат во L. Ќе докажеме дека S, T и L се колинеарни. Доволно е да покажеме дека:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} \cdot \frac{\overline{ST}}{\overline{TL}} \cdot \frac{\overline{LC}}{\overline{CB}} = 1 \quad или \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{TC}} \cdot \frac{\overline{ST}}{\overline{TL}} \cdot \frac{\overline{LC}}{\overline{CB}} = 1 \iff \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{ST}}{\overline{CT}} \cdot \frac{\overline{LC}}{\overline{TL}} = 1$$

$$\iff \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin TCS}{\sin CST} \cdot \frac{\sin CTL}{\sin TLC} = 1$$ Нека $\sphericalangle TSC = x$ и $\sphericalangle TCS = y$. $\sphericalangle TCL = 180 - y$

па $$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin y}{\sin x} \cdot \frac{\sin(x+y)}{\sin\gamma} = 1.$$ $\sin\gamma = \sin\alpha+\beta$, па треба да докажеме

$$\sin\beta \sin y \cdot \sin(x+y) = \sin\alpha \cdot \sin x \cdot \sin(\alpha+\beta)$$

Од Менелај за ABC и BL, треба да докажеме дека

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CT}{TA} \cdot \frac{AS}{SB} = 1 \quad или \quad \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{BM}} = 1, \text{ т.е. } \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \left(\frac{\overline{BM}}{\overline{CN}}\right)^2.$$

$\overline{BL}\cdot\overline{LC} = \overline{LQ}\cdot\overline{LP}$ (степен на точка), $\overline{BL} = \frac{\overline{LQ}\,\overline{LP}}{\overline{LC}}$, па

$$\frac{\overline{LQ}\,\overline{LP}}{\overline{LC}^2} = \frac{\overline{BM}^2}{\overline{CN}^2}, \quad \frac{\sqrt{\overline{LQ}\cdot\overline{LP}}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CN}}$$