①. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $ab+bc+ac=6abc$; докажи

$$a+b+c \geq 1+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)$$

Решение:

$$a+b+c \geq 1+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)$$

$$a+b+c \geq 1+\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2b+b^2c+ac^2}{abc}$$

$$\cancel{a+b+c=\frac{abc}{6abc}}$$

$$a+b+c \geq 1+\frac{a^2b+b^2c+ac^2}{6abc}$$

$$a+b+c \geq \frac{6abc+a^2b+b^2c+ac^2}{6abc}$$

$$6abc(a+b+c) \geq 6abc+a^2b+b^2c+ac^2$$

$6abc(a+b+c)-6abc-a^2c-b^2c-ac^2 \geq 0$; бидејќи $ab+bc+ac=6abc$ имаме:

$$(ab+bc+ac)(a+b+c)-6abc-a^2c-b^2c-ac^2 \geq 0$$

$$a^2b+ab^2+abc+abc+\underline{\underline{b^2c}}+bc^2+\underline{a^2c}+abc+\underline{\underline{\underline{ac^2}}}-6abc-\underline{a^2c}-\underline{\underline{b^2c}}-\underline{\underline{\underline{ac^2}}} \geq 0$$

$$a^2b+ab^2+bc^2+3abc-6abc \geq 0$$

$$a^2b+ab^2+bc^2-3abc \geq 0$$

$$a^2b+ab^2+bc^2 \geq 3abc$$

Бидејќи од AM-GM имаме $a^2b+ab^2+bc^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^3}=3abc$ утврдивме дека важи неравенства.

Знак за равенството важи кога $a^2b+ab^2+bc^2=3abc$

значи кога $a=b=c$.

(2). Нека е $g = \gcd(a,b,c)$ тогаш од gcd имаме:

$a = gx$; $b = gy$; $c = gz$, така што $\gcd(x,y,z) = 1$

Од услови на задата имаме:

$a^2b \mid a^3+b^3+c^3 \Leftrightarrow g^3x^2y \mid g^3(x^3+y^3+z^3) \Rightarrow x^2 \mid x^3+y^3+z^3$

Слично имаме $y^2 \mid x^3+y^3+z^3$ и $z^2 \mid x^3+y^3+z^3$

Значи $x^3+y^3+z^3 \equiv 0 \pmod{x^2, y^2, z^2}$ или $x^2y^2z^2 \mid x^3+y^3+z^3$

Бидејќи $x,y,z \in \mathbb{N}$ имаме $x^3+y^3+z^3 \geq (xyz)^2$

Од AM-CMS имаме:

$x^3+y^3+z^3 \leq \sqrt{\frac{x^6+y^6+z^6}{3}}$

Тврдење: $a,b,c \in \mathbb{N}$, најди (a,b,c) такви што $a+b+c \geq abc$

Земаме $a \geq b \geq c$; $(a,1,1)$ е решение.

$a+b+c \leq 3a$ тогаш имаме

$3 \leq bc$ што води кон $b,c \leq 3$

$a,b,c \geq 2$ - контрадикција

$(a,b,1)$; $b \geq 2$ добиме $a \leq 3$.

Тоест ако едното е ≥ 2, другото $=1$; третото треба да е ≤ 3

Остана $(a,1,1)$ $\forall a \in \mathbb{N}$ $\wedge$ $a,b,c \leq 3$

Од тврдење имаме

$\sqrt{\frac{x^6+y^6+z^6}{3}} < \sqrt{\frac{x^6y^6z^6}{3}}$ з$(xyz)^2$ (Контрадикција со тврдење)

Тогаш решение остана

$(x,y,z) \in \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,2),(1,1,3),(1,3,3),(2,2,3),(2,3,3)\}$

Ја задоволуваат условот $(x,y,z) \in \{(1,1,1),(1,2,3)\}$

Значи $(a,b,c) = (k,k,k)$ и $(a,b,c) = (k;2k;3k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Без пермутации бидејќи е симетрична

⑥. Најди ги сите функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што:

$$f((x+y)^2) = (x+y)(f(x)+f(y))$$

Решение:

За $y = -x$ имаме $f(0) = 0$

Дадена равенства е еквивалентна со:

$$\frac{f((x+y)^2)}{x+y} = f(x)+f(y)$$

За $x_0 = a+b$; $(a, b \in \mathbb{R})$ две $y=0$ имаме:

$$\frac{f((a+b)^2)}{a+b} = f(a+b) + f(0) = f(a+b) \quad \ldots (1)$$

За $x=0$; $y=b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ имаме:

$$\frac{f((a+b)^2)}{a+b} = f(a) + f(b) \quad \ldots (2)$$

Од ...(1) и ...(2) имаме:

$$\frac{f((a+b)^2)}{a+b} = f(a+b) = f(a)+f(b)$$

$f(a+b) = f(a)+f(b)$ – Равенство на Коши

која ја има решения $f(x) = kx$ $(\forall k \in \mathbb{R})$